

Fakultät für Mathematik
 Prof. Dr. G. Christoph
 Dr. B. Leneke

Übungsaufgaben zur Vorlesung Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Blatt 6* - Abgabe bis Donnerstag, 18.11.2010, 14:00 Uhr (G 18 - 158)

29. (2 + 2 P)

Eine Urne enthält N Kugeln. Davon sind s schwarz und $N - s$ weiß. Wir betrachten die folgenden Zufallsexperimente.

- a) Für ein gegebenes $n \in N$ werden n Kugeln nacheinander mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den n gezogenen Kugeln genau k schwarze Kugeln sind, und bestimmen Sie auch die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses unter der Bedingung, dass im $(n - 1)$ -ten Zug eine weiße Kugel gezogen wird. Dabei sei $k \in 0, 1, \dots, n$ beliebig. Eine Modellformulierung wird erwartet.
- b) Es werden Kugeln nacheinander mit Zurücklegen gezogen, so oft bis erstmalig eine schwarze Kugel gezogen wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Ziehungen gerade ist. Auch hier wird eine Modellformulierung erwartet.

30. (2 + 1 + 2 P)

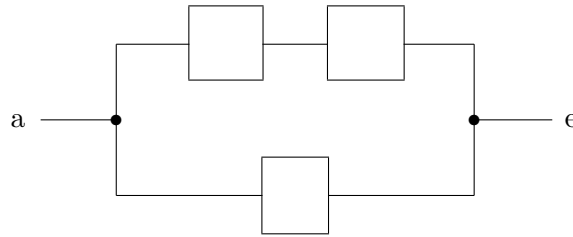
Die Zerfallszeit für ein Poloniumatom ist eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Mittels der Halbwertszeit, d.h. derjenigen Zeit, in deren Verlauf die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls eines Atoms gleich 0.5 ist und die für dieses radioaktive Element 140 Tage beträgt, bestimme man

- a) den Parameter λ der Exponentialverteilung,
- b) die Zeitdauer T so, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.9$ ein Zerfall erfolgt.

Zur Zeit $t = 0$ seien $n \in \mathbb{N}$ Poloniumatome vorhanden. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum für Y - "Anzahl der im Intervall $[0, 100]$ zerfallenen Atome an".

31. (4 + 6 P)

Es sei das folgende aus drei Teilen bestehende System s gegeben, das genau dann ausfällt, wenn keine intakte Verbindung zwischen a und e besteht:



Weiter seien drei Bauteile b_1, b_2, b_3 gegeben, die mit einer Wahrscheinlichkeit von p_1, p_2 bzw. p_3 stochastisch unabhängig voneinander ausfallen und an jeder der drei Positionen im System eingesetzt werden können. Es gelte $p_1 \geq p_2 \geq p_3$.

- Man platziere die Bauteile so, dass das System mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit nicht ausfällt und berechne diese Wahrscheinlichkeit.
- Aufgrund eines Produktionsfehlers stehen nur noch minderwertige Bauteile mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von jeweils $p = p_i = 0.9$ zur Verfügung. Man berechne in den folgenden beiden Varianten zur Erhöhung der Systemzuverlässigkeit jeweils die Gesamtausfallwahrscheinlichkeit und vergleiche diese.
 Variante A: n komplette Systeme (wie oben) werden parallelgeschaltet.
 Variante B: Jedes Bauteil im obigen System wird n -fach parallelgeschaltet.

32. (2 P)

Beweisen Sie, dass die diskrete geometrische Wahrscheinlichkeitsverteilung die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit hat, also dass für $X \sim Geo(p)$ gilt:

$$P(X > n + m | X > n) = P(X > m) \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Interpretieren Sie diese Eigenschaft.

33. (4 + 1 + 1 P)

Eine symmetrische Dreiecks- θ -verteilte Zufallsvariable ($\theta > 0$) hat folgende Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \theta}{\theta^2} & , \quad \text{für} \quad -\theta < x \leq 0 \\ \frac{-x + \theta}{\theta^2} & , \quad \text{für} \quad 0 < x < \theta \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F und stellen Sie diese und die Dichte graphisch dar.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(-\theta \leq X < \frac{\theta}{2})$.
- Bestimmen Sie den Median der Verteilung, also einen Wert q , so dass $F(q) = \frac{1}{2}$

* Im Internet verfügbar unter http://fma2.math.uni-magdeburg.de/~leneke/wtheorie_ws1011.html