Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg WS 2010/2011

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Christoph
Dr. B. Leneke

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Blatt 9* - Abgabe bis Donnerstag, 09.12.2010, 14:00 Uhr (G 18 - 158)

44. (2 + 3 P)
Die Anzahl der Einheiten eines Telefongesprächs wird als Zufallsvariable X aufgefasst und als geometrisch-(p)-verteilt angenommen.

   a) Berechnen Sie $E(X)$, d.h. die erwartete Länge eines Telefongesprächs.

   b) Zwei Tarifmodelle stehen zur Auswahl. Im ersten kostet jede Einheit 5 Ct. Im zweiten kosten die erste drei Einheiten je 6 Ct. und jede weitere 4 Ct. Wie hoch sind in den ersten beiden Modellen die erwarteten Kosten eines Telefongesprächs, wenn $p = 0.1$?

45. (3 + 3 P)
Seien $X_1, ..., X_n,\ n \geq 2$, unabhängige, identisch wie X verteilte reellwertige Zufallsvariablen. Sei $E(X) = \mu$ und $Var(X) = \sigma^2 < \infty$. Betrachten Sie folgende Zufallsgröße:
$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ mit $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Berechnen Sie den Erwartungswert von S_n^2 für festes n.

   b) Zeigen Sie, dass $S_n^2 \to \sigma^2$ (P)-fast sicher für $n \to \infty$.
   Zeigen Sie dafür zunächst mit der Ungleichung von Chebyshev, dass $P(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \to 0$, d.h. $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

46. (5 P)
Mittels Computer-Simulation lässt sich zu beliebig vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., p_6$ und $q_1, ..., q_6$ (jeweils ≥ 0 mit Summe gleich 1) das folgende Zufallsexperiment durchführen: Gegeben sind zwei Würfel, wobei der eine die Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., p_6$ und der andere die Wahrscheinlichkeiten $q_1, ..., q_6$ für die Augenzahlen $1, ..., 6$ hat. Die beiden Würfel werden unabhängig geworfen, und die *Summe der beiden Augenzahlen* ist das Ergebnis des Zufallsexperiments.
Ist es möglich, die Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., p_6$ und $q_1, ..., q_6$ so zu wählen, dass jeder Wert $2, 3, ..., 12$ für die Augensumme gleich wahrscheinlich ist?

47. (4 P)
Die stetige, reelle Zufallsgröße X unterliege einer Normalverteilung mit den Parametern μ und σ, d.h. $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^k \mu^{n-k} M_k$$

mit

$$M_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k = 2i-1 \quad (i \geq 1) \\ (2i-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2i-3)(2i-1) & , \quad k = 2i \qquad (i \geq 1) \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst eine Zufallsgröße $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$ und zeigen Sie $E(Y^n) = M_n \; (n \geq 0)$.
Benutzen Sie dann den Zusammenhang $\sigma Y + \mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

48. (3 P)
Ein Meinungsforschungsinstitut führt eine repräsentative Umfrage durch, um den Stimmenanteil $p \in (0,1)$ für eine Partei A bei denbevorstehenden Wahlen zu prognostizieren. Betrachten Sie das Ereignis, dass für die Anzahl X_n der „A-Wähler“ in der Stichprobe vom Umfang n gilt: $\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 0.02$.
Der Stichprobenumfang n soll so groß gewählt werden, dass dieses Ereignis mindestens die Wahrscheinlichkeit 0.95 hat. Bestimmen Sie ein solches n mit Hilfe der Ungleichung von Chebyshev, wenn i) über p nichts weiter bekannt ist, bzw. wenn ii) die Vorinformation $p < 0.1$ vorliegt.

* Im Internet verfügbar unter http://fma2.math.uni-magdeburg.de/∼leneke/wtheorie_ws1011.html