4 Induktive Statistik

4.1 Konfidenzintervall: Einführung

Grob gesagt wollen wir jedem Ereignis ω (in der Regel ein Ergebnis, das wir durch eine Stichprobe vom Umfang n erhalten) ein Intervall $I(\omega)$ zuordnen, so dass ein Parameter θ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in diesem Intervall liegt, also

$$P(\theta \in I(\omega)) = 1 - \alpha$$

Die Zahl $1 - \alpha$ heißt das **Konfidenzniveau**. Das liefert eine Schätzung für Θ. Man beachte aber, dass $I(\omega)$ das "zufällige" Ergebnis ist. Wir können $I(\omega)$ mit einer unteren und oberen Schranke festlegen. Das Intervall $I(\omega$ heißt Konfidenzintervall für den Parameter θ.

Das übliche Szenario ist das folgende: Wir ziehen eine Stichprobe vom Umfang n und berechnen aus den Stichprobenwerten x_i eine untere g_u und eine obere g_o Intervallgrenze. Wir haben also zwei Zufallsvariablen $g_u(\omega)$ und $g_o(\omega)$. Über diese können wir sinnvoll natürlich nur etwas aussagen, wenn wir ihre Verteilung kennen.

Beispiel 4.1. Gegeben sei eine $N(\mu, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariable X. Wir wollen ein Intervall angeben, das mit W.K. $1-\alpha$ den Erwartungswert μ enthält. Wähle dazu $z_\alpha/2$ als das $\alpha/2$-Quantil der Normalverteilung, also $\Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2$. Damit gilt

$$\begin{aligned} P(\frac{X(\omega)-\mu}{\sigma} < z_{\alpha/2}) &= \frac{\alpha}{2} \\ P(\frac{X(\omega)-\mu}{\sigma} > z_{1-\alpha/2}) &= 1-(1-\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$P\Big(z_{\alpha/2} \leq \frac{X(\omega)-\mu}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\Big) = 1-\alpha.$$

Benutze nun $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ und erhalte so

$$P(\mu - \sigma z_{1-\alpha/2} \leq X(\omega) \leq \mu + \sigma z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha.$$

Das bedeutet, mit W.K. $1-\alpha$ umfasst das Intervall

$$[X(\omega) - \sigma z_{1-\alpha/2},\ X(\omega + \sigma z_{1-\alpha/2}]$$

den Wert μ. Wir können also

$$g_u(\omega) = X(\omega) - \sigma z_{1-\alpha/2}$$

als Z.V. für eine untere Schranke des Konfidenzintervalls auffassen, sowie

$$g_o(\omega) = X(\omega) + \sigma z_{1-\alpha/2}$$

als Z.V. für eine obere Schranke. Wir nennen dies auch ein zweiseitiges Konfidenzintervall.

Wenn die Z.V. X einer anderen Verteilung genügt, müssen wir einfach andere Quantile benutzen!

Um ein einseitiges Konfidenzintervall anzugeben, müssen wir das $(1-\alpha)$-Quantil $z_{1-\alpha}$ der Normalverteilung suchen und können dann sagen: Mit W.K. $1-\alpha$ gilt

$$(-\infty, X(\omega) + \sigma z_{1-\alpha}]$$

den Wert μ. Ebenso gilt aber auch, dass

$$(X(\omega) - \sigma z_{1-\alpha},\ \infty]$$

den Wert μ mit W.K. $1-\alpha$ enthält. Man spricht dann von einseitigen Konfidenzintervallen.

Schon dieses Beispiel zeigt: Man muss **vorher** festlegen, welches Konfidenzintervall man bestimmen will (einseitig offen nach unten, einseitig offen nach oben oder zweiseitig). Sonst könnte man **nach** dem Experiment ja genau das Intervall heraussuchen, das einem passt, was hochgradig unseriös ist!! Ausserdem muss α vorher festgelegt werden!

4.2 Konfidenzintervalle für den Erwartungswert

Wir nehmen an, X ist eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte ZV. Zunächt einmal sei σ^2 bekannt. Dann ist der empirische Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ eine $N(\mu, \sigma^2/n)$-verteilte Z.V. (die Varianz von $X_1 + \ldots X_n$ ist $n\sigma^2$, die Division durch n bewirkt eine Division der Varianz durch n^2). Wir können also wörtlich das oben beschriebene Verfahren anwenden:

Zweiseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert bei bekannter Varianz

- Wähle α (sollte klein sein) sowie das $1-\alpha/2$-Quantil $z_{1-\alpha/2}$ der Standardnormalverteilung.
- Berechne $\bar{X}$.
- Das Intervall
$$[\bar{X} - \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X} + \sigma z_{alpha/2}/\sqrt{n}]$$

enthält den Erwartungswert μ mit W.K. $1-\alpha$.

Einseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert bei bekannter Varianz

- Wähle α (sollte klein sein) sowie das $(1-\alpha)$-Quantil $z_{1-\alpha}$ der Standardnormalverteilung.
- Berechne $\bar{X}$.
- Das Intervall
$$(-\infty, \bar{X} + \sigma z_{alpha}/\sqrt{n}]$$
enthält den Erwartungswert μ mit W.K. $1-\alpha$.

Ebenso kann man natürlich ein einseitiges Konfidenzintervall angeben, das nach oben unbeschränkt ist.

Interessant ist, dass man auch seriös ein Konfidenzintervall angeben kann, wenn man die Standardabweichung nicht kennt. Man muss allerdings immer noch eine Normalverteilungsannahme zugrunde legen. Klar ist, dass die Konfidenzintervalle jetzt größer sein müssen.

Grundlage ist Satz 3.11:

Zweiseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert bei unbekannter Varianz

- Wähle α (sollte klein sein) sowie das $(1-\alpha/2)$-Quantil $t_{n-1,1-\alpha/2}$ der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden (n ist die Stichprobengröße).
- Berechne $\bar{X}$ sowie die emprische Standardabweichung $\bar{S}$.
- Das Intervall

  $$[\bar{X} - t_{n-1,1-\alpha/2}\bar{S}/\sqrt{n},\ \bar{X} + t_{n-1,1-\alpha/2}\bar{S}/\sqrt{n}]$$

  enthält den Erwartungswert μ mit W.K. $1-\alpha$.

Entsprechend kann man auch einseitige Intervalle angeben.

Zweiseitiges Konfidenzintervall für die Varianz einer normalverteilten Zufallsvariable

Wir können auch Konfidenzintervalle für σ^2 angeben, weil $(n-1)\bar{S}^2/\sigma^2$ eine Z.V. ist, die $\chi^2(n-1)$-verteilt ist, sofern wir eine Stichprobe vom Umfang n einer normalverteilten Z.V. ziehen.

- Wähle α sowie das $\alpha/2$- und $(1-\alpha/2)$-Quantil der $\chi^2(n-1)$-Verteilung. Diese seien $c_{n-1,\alpha/2}$ und $c_{n-1,1-\alpha/2}$.
- Berechne $\bar{S}^2$.
- Dann gilt
$$P\big(c_{n-1,\alpha/2} \leq \frac{(n-1)\bar{S}^2}{\sigma^2} \leq c_{n-1,1-\alpha/2}) = 1-\alpha.\big)$$
Also ist
$$[\frac{(n-1)\bar{S}^2}{c_{n-1,1-\alpha/2}}, \ \frac{(n-1)\bar{S}^2}{c_{n-1,\alpha/2}}]$$
ein Konfidenzintervall für σ^2 zum Konfidenzniveau $1-\alpha$.

4.3 Konfidenzintervall für W.K. eines Bernoulliexperimentes

Unter Benutzung der Approximation der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung kann man folgendes Konfidenzintervall für p in einem Bernoulli-Experiment angeben, wenn dieses Experiment n-mal wiederholt wird. Dabei sollte $n > 20$ gelten und der Wert k/n nicht zu nahe bei 1 oder 0 liegen:

Wenn ein Bernoulli-Experiment mit unbekannter W.K. p für das Eintreten eines Ereignisses n mal durchgeführt wird und dabei dieses Ereignis k mal eintritt, so enthält das Intervall

$$[\frac{k-\frac{1}{2}+\frac{c^2}{2}-c\sqrt{k-\frac{1}{2}-n^{-1}(k-\frac{1}{2})^2+\frac{c^2}{4}}}{n+c^2}, \frac{k+\frac{1}{2}+\frac{c^2}{2}+c\sqrt{k+\frac{1}{2}-n^{-1}(k+\frac{1}{2})^2+\frac{c^2}{4}}}{n+c^2}]$$

den Wert p mit W.K. $1-\alpha$. Hierbei ist $c = z_{1-\alpha/2}$ wieder das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Normalverteilung. Wir haben hierbei die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung benutzt.

Für $k, n-k > 50$ kann man dieses Intervall durch

$$[\frac{k}{n} - \frac{c}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})},\ \frac{k}{n} + \frac{c}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}]$$

ersetzen.

4.4 Wahl der Stichprobengröße

Bei der Bestimmung eines Konfidenzintervalls gehen neben der Stichprobe auch n und α ein. Wenn n vorgegeben ist, werden die Konfidenzintervalle natürlich immer größer, je kleiner α wird. Nun kann man ja auch versuchen, zu gegebenem α ein n so zu finden, dass das Intervall nicht zu groß wird.

Schauen wir uns dazu das Beispiel eines zweiseitigen Konfidenzintervalls an für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariable bei bekannter Varianz an. Ein Konfidenzintervall zum Niveau α ist dann

$$[\bar{X} - \sigma z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n},\ \bar{X} + \sigma z_{1-alpha/2}/\sqrt{n}]$$

Wenn die Intervalllänge höchstens δ sein soll, dann gilt $\delta \leq 2z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$, also

$$n \geq 4(z_{1-\alpha/2})^2\delta^2\sigma^2.$$

4.5 Hypothesentest

Bei der Angabe von Konfidenzintervallen sind wir stets von der Gültigkeit einer Hypothese ausgegangen, dass beispielsweise eine normalverteilte Z.V. mit Erwartungswert μ vorliegt, obwohl wir μ nicht kennen. Wir haben dann ein Intervall angegeben, dass μ mit einer gewissen (hohen) W.K. enthält. Grob gesagt würde man sagen, die Annahme über μ ist vielleicht nicht richtig, wenn das Konfidenzintervall den Wert μ nicht enthält.

Etwas genauer:

Wir haben eine Zufallsvariable X, die von einem unbekannten Parameter θ abhängt, wobei $\theta \in \Theta$ in einem Parameterraum Θ liegt. Eigentlich sollten wir also X_θ schreiben. Wir wollen nun "testen", ob $\theta \in \Theta_0$ oder $\theta \in \Theta_1$ gilt. Dabei müssen Θ_0 und Θ_1 natürlich disjunkt sein und es soll $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ gelten. Wir nennen die Hypothese $\theta \in \Theta_0$ die (Null)hypothese und die Alternative $\theta \in \Theta_1$ die Gegenhypothese.

Wenn $|\Theta_0| = 1$ aus nur einem Element besteht, nennen wir dies eine einfache Hypothese.

Die einzige Möglichkeit, etwas über die Hypothese zu erfahren, ist, sich eine konkrete Realisierung x der Zufallsvariable anzuschauen. Mit $\mathcal{X}$ bezeichnen wir die Menge aller möglichen Realisierungen von X. Wir teilen $\mathcal{X}$ in zwei disjunkte Mengen $\mathcal{X}_0$ und $\mathcal{X}_1$ auf. Wenn dann die Realisierung der Z.V. X in $\mathcal{X}_0$ liegt, so entscheiden wir uns für H_0, andernfalls für H_1. Unsere Entscheidung kann richtig sein, aber auch falsch. So können wir uns für H_1 entscheiden, obwohl H_0 richtig ist (**Fehler erster Art**) oder genau umgekehrt, wir entscheiden uns für H_0, obwoh H_1 richtig wäre (**Fehler zweiter Art**).

Die Zufallsvariable X_θ hat eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_θ. Als Gütefunktion

g bezeichnen wir die Abbildung

$$\begin{aligned} g: \Theta &\to [0,1] \\ \theta &\mapsto P_\theta(x \in \mathcal{X}_1) \end{aligned}$$

Die Gütefunktion sollte auf Θ_0 klein sein, um den Fehler 1. Art klein zu halten, und gleichzeitig muss g auf Θ_1 großsein, um den Fehler 2. Art klein zu halten.

Bei einem statistischen Test müssen wir nun $\mathcal{X}_0$ und $\mathcal{X}_1$ angeben. Wir nennen einen solchen Test einen Test zum Signifikanzniveau α wenn $g(\theta) \leq \alpha$ für alle $\theta \in \Theta_0$ gelten soll. Wir wählen $\mathcal{X}_0$ so, dass das Eintreten des Ereignisses $x \in \mathcal{X}_1$ unter der Annahme $\theta \in \Theta_0$ mit W.K. $\leq \alpha$ eintritt. Aber genau das haben wir bei der Angabe von Konfidenzintervallen gemacht, zumindest wenn wir eine einfache Hypothese testen wollen. Genaugenommen haben wir nicht $calX_1$, sondern das Konfidenzintervall $\mathcal{X}_0$ angegeben.

Der populärste Test ist der sogenannte Gauß-Test. Dabei wollen wir den unbekannten Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen X "testen". Übliche Hypothesen sind

- $H_0 : \mu = \mu_0$ versus H_1: $\mu \neq \mu_0$
- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ versus H_1: $\mu < \mu_0$ (einseitiger Test)

- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus H_1: $\mu > \mu_0$ (einseitiger Test)

Wir testen durch n-maliges Wiederholen des entsprechenden Zufallsexperimentes. Wir geben im Fall des zweiseitigen Gauß-Tests ein zweiseitiges Konfidenzintervall an (das ist unser Annahmebereich für die Nullhypothese). Im Fall des Tests $\mu \geq \mu_0$ (als Nullhypothese) versus der Alternative $\mu < \mu_0$ wählen wir als Annahmebereich ein Intervall $[z, \infty)$, als $\mathcal{X}_1$ also $(-\infty, z)$. Unter der Annahme $\mu = \mu_0$ gilt also $\bar{X} \geq z$ mit W.K. $1 - \alpha$ und somit gilt $\bar{X} < z$ mit W.K. α. Nun soll aber die W.K. für $\bar{X} < z$ nicht nur unter der Hypothese $\mu = \mu_0$ einen Wert $\leq \alpha$ annehmen, sondern für alle $\mu \geq \mu_0$. Das ist in diesem Fall aber klar, denn wenn der Erwartungswert μ grøßer wird, sinkt natürlich die W.K., dass $\bar{X}$, der empirische Mittelwert, klein wird.

5 Numerik

5.1 Approximation

5.2 Numerische Integration

5.3 Numerische Lineare Algebra

6 Differenzialgleichungen

6.1 Einseitige Konfidenzintervalle

6.2 Zweiseitige Konfidenzintervalle

6.3 Asymptotische Konfidenzintervale

6.4 Hypothesentest

7 Numerik

7.1 Approximation

7.2 Numerische Integration

7.3 Numerische Lineare Algebra