4.2 Grundbegriffe der Finanzmathematik

Im weiteren werden die folgenden Bezeichnungen benutzt:

K_0	Anfangskapital
p	Zinsfuß pro Zeiteinheit (in %)
$d = \frac{p}{100}$	Zinssatz pro Zeiteinheit
$q = 1 + d$	Aufzinsungsfaktor
n	Anzahl der Zeiteinheiten (meistens Jahre)
Z_n	Zinsen nach n Zeiteinheiten
K_n	Kapital nach n Zeiteinheiten

Zinsrechnung

(A) Die **lineare (einfache) Verzinsung**, bei der innerhalb eines Kapitalüberlassungszeitraumes kein Zinszuschlagtermin (oder Zinsverrechnungstermin) liegt, wird durch eine arithmetische Folge beschrieben.

Beispiel 4.11 Zum Zinssatz $d = 0,06 = 6\%$ p.a. wird das Kapital $K_0 = 100.000$ (€ oder Maltesische Lira) für einen Zeitraum von 6 Jahren ausgeliehen.

$$Z_n = K_n - K_0$$

Damit ergibt sich

$$d = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n}$$

$$\begin{aligned}
K_0 &= 100.000, \\
K_1 &= K_0 \cdot (1 + d), & Z_1 &= K_0 \cdot d, \\
K_2 &= K_0 \cdot (1 + 2 \cdot d), & Z_2 &= K_0 \cdot 2 \cdot d, \\
K_3 &= K_0 \cdot (1 + 3 \cdot d), & Z_3 &= K_0 \cdot 3 \cdot d, \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot d}$$

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot d}$$

Nach 6 Jahren belaufen sich die Zinsen auf

$$Z_6 = K_0 \cdot 6 \cdot d = 36.000$$

und das (End)-Kapital beträgt

$$K_6 = K_0 \cdot (1 + 6 \cdot d) = \underline{136.000}\,.$$

Lineare Verzinsung:
Bei der linearen Verzinsung zum Zinssatz d ergeben sich die folgenden expliziten Formeln für das Kapital und die Zinsen nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot d) \quad \text{und} \quad Z_n = K_0 \cdot n \cdot d.$$

Beispiel 4.12 Welches Anfangskapital K_0 muss bei einfacher Verzinsung angelegt werden, wenn nach 7 Jahren ein Kapital von 100.000 € vorhanden sein soll und der Zinssatz $0,05$ bzw. $0,06$ beträgt, also 5% bzw. 6%.
Im ersten Fall muss die Gleichung

$$K_7 = 100.000 = K_0(1 + 7 \cdot 0,05) = K_0 \cdot 1,35$$

nach K_0 aufgelöst werden. Das ergibt ein benötigtes Anfangskapital von

$$K_0 = \frac{100000}{1,35} \approx 74.074 \text{ €}.$$

Im zweiten Fall ergibt sich analog

$$K_0 = \frac{100000}{1,42} \approx 70.422 \text{ €}.$$

(B) Neben der einfachen Verzinsung spielt natürlich die **Zinseszinsrechnung** eine wichtige Rolle. Hier gibt es innerhalb der Kapitalüberlassungsfrist weitere Zinsverrechnungs- oder Zinszuschlagtermine, in denen die bis dahin entstandenen Zinsen dem Kapital als Zinszuschlag hinzugefügt werden und mit ihm zusammen das weiter zu verzinsende Kapital bilden.
Wir betrachten noch einmal das obige Beispiel, wobei diesmal die Zinsen jährlich nachträglich dem Kapital zugeschlagen und ebenfalls verzinst werden.

Beispiel 4.13 Es wird das Kapital $K_0 = 100.000$ € für einen Zeitraum von 6 Jahren angelegt. Nach jeder Zinsperiode (1 Jahr) erfolgt ein Zinszuschlag von $d = 0,06 = 6\%$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} K_0 &= 100.000, \\ K_1 &= K_0 \cdot (1+d), \\ K_2 &= K_1 \cdot (1+d) = K_0 \cdot (1+d)^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nach 6 Jahren ist also das Gesamtkapital

$$K_6 = K_0 \cdot (1+d)^6 \approx 141.852 \text{ €}.$$

Zinseszinsrechnung:
Bei Berücksichtigung **nachschüssiger Zinseszinsen** ergeben sich die folgenden Formeln für das Kapital und die Zinsen nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \cdot (1+d)^n \quad \text{und} \quad Z_n = K_n - K_0.$$

Nachschüssigkeit bedeutet, dass die Zinsen am Ende des Jahres gezahlt werden.

Beispiel 4.14 Der Unterschied zwischen einfacher Verzinsung und (nachschüssigem) Zinseszins bezogen auf einen Zeitraum von bis zu 50 Jahren ist in der folgenden Tabelle für

$$K_0 = 1.000 \text{ und } d = 0,05 = 5\%$$

zu erkennen.

n	1	5	10	20	50
$K_0(1+nd)$	1050	1250	1500	2000	3500
$K_0(1+d)^n$	1050	1276	1629	2653	11467

Beispiel 4.15 Welches Anfangskapital K_0 muss bei nachschüssigem Zinseszins angelegt werden, wenn nach 7 Jahren ein Kapital von 100.000 € vorhanden sein soll und der Zinssatz 0,05 bzw. 0,06 beträgt?
Im ersten Fall muss die Gleichung

$$K_7 = 100000 = K_0 \cdot (1 + 0,05)^7$$

nach K_0 aufgelöst werden. Das ergibt ein benötigtes Anfangskapital von

$$K_0 = \frac{100000}{1,05^7} \approx 71068 \text{ €}.$$

Analog ergibt sich im zweiten Fall

$$K_0 = \frac{100000}{1,06^7} \approx 66506 \text{ €}.$$

Die Berechnung von K_0 aus gegebenem n, d und K_n wird auch als Bestimmung des **Barwertes einer zukünftigen Zahlung** bezeichnet.

Barwertformel der Zinseszinsrechnung:
Der heute zahlbare Betrag K_0, der benötigt wird, um eine in n Zeitperioden fällige Schuld K_n abzulösen, beträgt

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+d)^n} = K_n(1+d)^{-n},$$

wobei d der Zinssatz pro Zeitperiode ist. K_0 heißt **Barwert** des nach n Zeitperioden fälligen Betrags K_n oder auch n-mal **abgezinstes bzw. diskontiertes Kapital** K_n.

Das Abzinsen erlaubt den Vergleich von Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten: eine Zahlung K, fällig in n_0 Zeitperioden, und eine Zahlung $\widetilde{K}$, fällig in

$\tilde{n}_0$ Zeitperioden, heißen **äquivalent** bezüglich eines Zinssatzes d, wenn gilt

$$\widetilde{K}(1+d)^{-\tilde{n}_0} = K(1+d)^{-n_0}$$

$K_n = K_0 \cdot (1+d)^n$

oder, anders geschrieben,

$$\widetilde{K} = K(1+d)^{\tilde{n}_0 - n_0}.$$

Ebenso wie das Anfangskapital K_0 lassen sich auch der Zinssatz d sowie die Anzahl n der Jahre aus den anderen Größen in der Zinseszinsformel ermitteln

$$\boxed{d = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1, \quad n = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln(1+d)} = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+d)}.}$$

$, K_0 = \frac{K_n}{(1+d)^n}$

Beispiel 4.16 Sie bringen ein Anfangskapital von 500 € zur Bank und erhalten 8% jährliche nachschüssige Zinseszinsen. Wie lange müssen Sie warten, bis Sie ein Kapital von 900 € besitzen?
Wir berechnen die Anzahl der Jahre durch

$$n = \frac{\ln 900 - \ln 500}{\ln(1,08)} \approx 7,637.$$

Sie müssen also 8 Jahre warten.

$\left(1+\frac{d}{4}\right)^4 = 1+d+\ldots > 1+d$

Geben Sie bei einer Aufgabe wie dieser Ihr Ergebnis bitte nicht in der Form $n = 7,637$ an. Die hier verwendeten Formeln sagen zunächst nur etwas aus über die Kapitalentwicklung zu festen Zeitpunkten, also z.B. nach 7 und nach 8 Jahren, und nicht, nach welcher Formel sich das Kapital dazwischen entwickelt. Außerdem suggeriert eine Angabe wie 7,637 Jahre eine unangemessene Genauigkeit: Sie rechnen hier genauer als bis auf einen Tag genau, obwohl in der Regel bei (kleineren) Finanzgeschäften nur bis auf den Tag genau und nicht etwa Stundengenau gerechnet wird!

(C) Werden die Zinsen dem Kapital auch nach Zeitintervallen gutgeschlagen, die kleiner sind als ein Jahr (oder die dem angegebenen Zinssatz zugrunde liegende Zeiteinheit) und im weiteren mitverzinst, so spricht man von **unterjähriger Verzinsung**.

Beispiel 4.17 Eine Bank gibt für die Verzinsung eines Kapitals K_0 einen **nominellen** Jahreszinssatz d an. Der Zinszuschlag erfolgt allerdings nicht jährlich, sondern nach jedem Quartal. Dann ergibt sich nach einem Jahr als Kapital

$$K_0 \cdot \left(1+\frac{d}{4}\right)^4$$

$\left(1+\frac{d}{4}\right)^4$ Aufzinsungsfaktor

und der **effektive Jahreszins** beträgt $\left(1+\frac{d}{4}\right)^4 - 1.$

$> 1+d$

Ist zum Beispiel $K_0 = 1000$ und $d = 0,05$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0\big(1 + \tfrac{0,05}{4}\big)^4 \approx 1051 \\ K_2 &= K_1\big(1 + \tfrac{0,05}{4}\big)^4 = K_0\big(1 + \tfrac{0,05}{4}\big)^8 \approx 1104 \\ K_3 &= K_2\big(1 + \tfrac{0,05}{4}\big)^4 = K_0\big(1 + \tfrac{0,05}{4}\big)^{12} \approx 1161 \end{aligned}$$

Der effektive Jahreszins ist hier $(1 + \frac{0.05}{4})^4 - 1 \approx 0.051$, also etwa 5.1%. Anders gesagt: Ein nomineller Zinssatz von 5% bei vierteljährlicher Zinszahlung ist dasselbe wie ein Zinssatz von 5.1%, der nur einmal jährlich gutgeschrieben wird. Es sei darauf hingewiesen, dass man in der Praxis unter effektivem Jahreszins noch etwas anderes versteht (da werden noch Gebühren usw. eingerechnet.

Unterjährige Verzinsung:
Erfolgt bei einem nominellen Jahreszinssatz d an m Zeitpunkten eines Jahres ein nachschüssiger Zinszuschlag, dann beträgt das Kapital nach Ablauf des n-ten Jahres

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Der effektive Jahreszins ist gleich

$$\left(1 + \frac{d}{m}\right)^{m} - 1.$$

$1 + d \longleftrightarrow \left(1 + \frac{d}{m}\right)^m$

Lässt man die Zeitintervalle der Zinszuschläge immer kürzer werden (d. h. $m \to \infty$), so kommt man zur **stetigen Verzinsung**. Der effektive Jahreszins ist dann

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{d}{m}\right)^{m} - 1 = \mathrm{e}^{d} - 1.$$

$\longleftrightarrow e^d - 1$

Die folgende Tabelle gibt den effektiven Zinssatz bei unterjähriger Verzinsung zu verschiedenen Zeitintervallen sowie bei stetiger Verzinsung an. Die nominellen

Bsp: $q = 1{,}05$, d.h. 5% Zinsen, effektiv $e^{0{,}05} - 1$

Zinssätze sind 2%, 5% und 10%.

m	2%	5%	10%
2	$2,010$	$5,063$	$10,250$
4	$2,015$	$5,095$	$10,381$
12	$2,018$	$5,116$	$10,471$
365	$2,020$	$5,127$	$10,517$
$(\mathrm{e}^d - 1)\%$	$2,020$	$5,127$	$10,517$

Rentenrechnung

Unter einer n-maligen **Rente** versteht man eine regelmäßige, in n gleichen Zeitabständen fällige Zahlung, die aus n Teilzahlungen R_j, mit $j = 1, \ldots, n$, besteht, den **Rentenraten**.
Bei der **nachschüssigen Rente** erfolgt die Zahlung R_j am Ende des j-ten Zeitabschnitts, bei der **vorschüssigen Rente** dagegen am Beginn des j-ten Zeitabschnitts.

Im Zusammenhang mit Renten interessiert man sich vor allem für den Gesamtwert, unter Berücksichtigung von Zinseszins, den eine Rente am Anfang bzw.

Ende der Rentenzahlungen hat. Hierbei kommt es darauf an, ob die Rente nach- oder vorschüssig gezahlt wird. Denn bei nachschüssiger Zahlung einer n-maligen Rente wird die erste Rentenzahlung nur $n-1$ Jahre verzinst, bei vorschüssiger aber n Jahre. Entsprechendes gilt für die weiteren Zahlungen.
Im folgenden betrachten wir nur den Fall konstanter Rentenzahlungen, also $R_j = R$ für alle j.

Rentenendwertformel bei nach- und vorschüssiger Zahlung:
Bei dem Aufzinsungsfaktor $q = 1+d$ und der konstanten Rentenzahlung R ergibt sich bei nachschüssiger Zahlung der Gesamtwert

$$
\begin{aligned}
K_n &= Rq^{n-1} + Rq^{n-2} + Rq^{n-3} + \ldots + R \\
&= \sum_{k=1}^{n} Rq^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} Rq^{k-1} = R\frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}
$$

$$R \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

$$= R \cdot \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

und bei vorschüssiger Zahlung

$$
\begin{aligned}
K_n &= Rq^n + Rq^{n-1} + Rq^{n-2} + \ldots + Rq \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} Rq^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} Rq^k = Rq\frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}
$$

$$R + R \cdot q + R \cdot q^2 + \ldots + R \cdot q^{n-1}$$

$$k=1 \qquad k=2 \qquad k=3 \qquad k=n$$

Falls zu Beginn des Zeitraums auch noch ein Anfangskapital K_0 vorliegt (wie oft bei Ratensparverträgen), so ergeben sich als Endwerte bei nach- und vorschüssiger Zahlung

$$K_n = K_0 q^n + R\frac{q^n - 1}{q - 1},$$
$$K_n = K_0 q^n + Rq\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Beispiel 4.18 Sie schließen mit Ihrer Bank einen Ratensparvertrag über 10 Jahre zu einem Zinsfuß von 6% ab. Zu Beginn des ersten Jahres zahlen Sie einen Einmalbetrag von 1500 € ein und anschließend jeweils am Ende des Jahres eine Rate von 200 €. Welchen Wert hat das Kapital nach 10 Jahren?
Da es sich um nachschüssige Ratenzahlung handelt, ergibt sich als Endwert

$$K_{10} = 1500 \cdot 1,06^{10} + 200 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1} \approx 5322 \text{ €}.$$

Das von Ihnen eingezahlte Kapital beträgt $1500 + 10 \cdot 200 = 3500$ €. Der Rest stammt aus den Zinseszinsen.

$K_0 = 1500$ €

200 € $= R$ vorschüssig $n = 10$

$$K_n = 1500\cdot(1{,}06)^{10} + 200\cdot(1{,}06)\cdot\frac{(1{,}06)^{10}-1}{0{,}06} \qquad (*)$$

Alternativ: $K_0 = 1700$, Rest vorschüssig, 9 Jahre

$$K_9 = 1700\cdot 1{,}06^{10} + 200\cdot\frac{(1{,}06)^{9}-1}{0{,}06}\cdot(1{,}06)$$

$$= 1500\cdot(1{,}06)^{10} + 200\cdot(1{,}06)^{10} + 200\,(1{,}06)\cdot\frac{1{,}06^{9}-1}{0{,}06}$$

$$= 1500 \cdot 1{,}06^{10} + 200 \cdot 1{,}06^{10} + 200 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{9} - 1}{0{,}06}$$

$$= 1500 \cdot 1{,}06^{10} + 200 \cdot 1{,}06 \cdot \left[1{,}06^{9} + \frac{1{,}06^{9} - 1}{0{,}06} \right]$$

$$= 1500 \cdot 1{,}06^{10} + 200 \cdot 1{,}06 \cdot \left[\frac{1{,}06^{9} \cdot 0{,}06 + 1{,}06^{9} - 1}{0{,}06} \right]$$

$$= 1500 \cdot 1{,}06^{10} + 200 \cdot 1{,}06 \cdot \left[\frac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} \right],$$ also gleich (*)

Löst man die Rentenendwertformeln (ohne Anfangskapital) nach R auf, so kann man bestimmen, welche jährliche Rate zu zahlen ist, um bei einem Zinsfuß von $p\%$ nach n Jahren ein gewünschtes Kapital zu erhalten. Mit dem Aufzinsungsfaktor $q = 1 + d = 1 + \frac{p}{100}$ ergeben sich bei nach- und vorschüssiger Zahlung

$$\boxed{R = K_n \frac{q-1}{q^n - 1} \quad \text{und} \quad R = \frac{K_n}{q} \frac{q-1}{q^n - 1}}$$

Bei Berücksichtigung eines Anfangskapitals K_0 erhalten wir

$$R = (K_n - K_0 q^n) \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} \quad \text{(nachschüssig)}$$

$$R = (K_n - K_0 q^n) \cdot \frac{q-1}{q(q^n - 1)} \quad \text{(vorschüssig)}$$

Wenn Sie wissen wollen, nach wie vielen Jahren Sie bei konstanter Rentenzahlung R ein Kapital K angespart haben, müssen Sie nach n auflösen:

$$n = \ln\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right) / \ln(q) \quad \text{(nachschüssig)}$$

$$n = \ln\left(\frac{\frac{K_n}{q} + \frac{R}{q-1}}{\frac{K_0}{q} + \frac{R}{q-1}}\right) / \ln(q) \quad \text{(vorschüssig)}$$

Eine einfache Formel, um q aus R, n, K_n und K_0 auszurechnen, gibt es nicht.

Tilgungsrechnung