Kapitel 1. Grundlagen

1.1 Das Rechnen mit Zahlen

Wir gehen in dieser Vorlesung mit folgenden Zahlbereichen um:

$\mathbb{N}$:	natürliche Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
$\mathbb{Z}$:	ganze Zahlen $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Q}$:	rationale Zahlen: das sind die Zahlen, die man als Quotient $\frac{p}{q}$ zweier ganzer Zahlen p und q schreiben kann.

Es gibt auch nicht rationale (irrationale) Zahlen, z.B. $\sqrt{2}$ oder π.

$\mathbb{R}$:	reelle Zahlen: rationale **und** irrationale Zahlen.

Wenn wir uns auf die positiven (negativen) Zahlen beschränken wollen, setzen wir ein hochgestelltes $+$ $(-)$ Zeichen hinter unser Symbol, also $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$ und $\mathbb{R}^+$ sowie $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}^-$ und $\mathbb{R}^-$. Beachte $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. Wenn wir in unsere Zahlbereiche auch noch die 0 einschließen wollen, schreiben wir eine tiefergestellte 0 hinter unser Symbol, also bezeichnet z.B. $\mathbb{N}_0$ die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$. Diese Menge bezeichnet man auch als die Menge der nicht negativen ganzen Zahlen!

Es folgen nun einige einfache Rechenregeln:

Binomische Formeln

[B1]	$(a+b)^2$	$=$	$a^2 + 2ab + b^2$
[B2]	$(a-b)^2$	$=$	$a^2 - 2ab + b^2$
[B3]	$(a+b)(a-b)$	$=$	$a^2 - b^2$

Beispiel 1. Wir können die binomischen Formeln nutzen, um Produkte effizient auszurechnen:

- $19 \cdot 21 = (20-1) \cdot (20+1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399$
- $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10201$

Potenzen und Wurzeln

Wir schreiben für das n-fache Produkt von a auch a^n:

$$a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n.$$

a Basis, n Exponent oder Potenz. Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende wichtige Rechenregeln:

[P1]	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$
[P2]	$a^n a^m = a^{n+m}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$
[P3]	$a^n a^{-m} = a^{n-m}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$
[P4]	$a^n b^n = (ab)^n$
[P5]	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ für $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
[P6]	$(a^n)^m = a^{(nm)}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$
[P7]	$a^0 = 1$ für $a \neq 0$
[P8]	$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$
[P9]	$\sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m = b^{\frac{m}{n}}$

Beachte, dass es keine Möglichkeit gibt, $a^n b^m$ zu vereinfachen.

Der Ausdruck 0^0 ist nicht definiert.

Beispiel 2.

- $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3+4} = 2^7 = 128.$

- $2^3 \cdot 6^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = (2 \cdot 6)^3 = 12^3 = 1728$

- Die Zahl 10^{12} hat in ihrer Dezimaldarstellung 12 Nullen. Das ist schon eine sehr große Zahl. Die Zahl $(10^{12})^{10^{12}}$ hat in ihrer Dezimaldarstellung $12 \cdot 10^{12}$ Nullen. Diese Zahl ist unvorstellbar groß. Nicht ganz ernstgemeinte Schätzungen sagen, dass dies die Wahrscheinlichkeit ist, dass menschliches Leben durch "quantum teleportation" auf den Mars übertragen werden kann! Dieses Beispiel soll Ihnen zeigen, wie astronomisch gross Zahlen werden können, wenn sie potenziert werden.

- $a^2 b^{-3} a^4 c^{-2} b^{-1} c = a^6 b^{-4} c^{-1} = \dfrac{a^b}{cb^4}$

- $\dfrac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt{y^3}} = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{2}{5}} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{5}+\frac{3}{2}} = x^{\frac{11}{12}} y^{\frac{19}{10}}.$

Logarithmus

Die Umkehrung des Potenzierens ist das Logarithmieren.

Gilt $a^x = b$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, so heißt x der Logarithmus von b zur Basis a. Bezeichnung: $x = \log_a(b)$.

Manchmal lassen wir die Angabe der Basis auch weg. Ist die Basis 10, sprechen wir vom dekadischen Logarithmus. Ist a die Eulersche Zahl $e \approx 2,7182\ldots$, heisst der Logarithmus natürlich. Der natürliche Logarithmus wird meistens mit $\ln$ bezeichnet, der dekadische Logarithmus mit $\lg$.

Wir halten noch einmal explizit fest:

$$\boxed{a^{\log_a(b)} = b}$$

Für das Logarithmieren gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{array}{|ll|}\hline
\text{[L1]} & \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \\
\text{[L2]} & \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y) \\
\text{[L3]} & \log(x^n) = n \cdot \log(x) \\
\text{[L4]} & \log(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{1}{n}\log(x) \\
\text{[L5]} & \log(x^{-1}) = -\log(x). \\ \hline
\end{array}$$

Für die konkrete Berechnung von Logarithmen benötigt man eigentlich nur die Kenntnis der Logarithmen zu einer bestimmten Basis:

> Seien $a, b > 0$ und $a, b \neq 1$. Dann gilt
>
> [L6] $\quad \log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$

Wir können uns dies wie folgt klarmachen. Wir schreiben [L6] etwas um:

$$\log_a(x) \cdot \log_b(a) = \log_b(x).$$

Nenne die linke Seite y. Wir müssen uns überzeugen, dass $b^y = x$ gilt, denn dann ist ja $y = \log_b(x)$:

$$\begin{aligned} b^y &= b^{\log_b(a)\cdot\log_a(x)} = \\ &= \left(b^{\log_b(a)}\right)^{\log_a x} = \\ &= a^{\log_a x} = x. \end{aligned}$$

Beispiel 3.

- $\log_2(16) = 4.$
- $\log_{10}(1000) = 3.$
- $\log_{100}(1000) = \dfrac{\log_{10}(1000)}{\log_{10}(100)} = \dfrac{3}{2}$

  Probe: $100^{(3/2)} = 100^1 \cdot 100^{(1/2)} = 100 \cdot 10 = 1000.$

Beispiel 4. Wir wollen die Gleichung

$$2\log x = \log 125 - \log 5$$

lösen. Dazu formen wir die linke und rechte Seite um, indem wir die Grundregeln für das Logarithmieren benutzen:

$$\log(x^2) = \log \frac{125}{5} = \log 25,$$

also $x^2 = 25$, also $x = 5$ oder $x = -5$.

Beispiel 5. Wir wollen

$$\log \sqrt{ab} - \frac{1}{2} \log b$$

vereinfachen. Es gilt

$$\log \sqrt{ab} = \log[(ab)^{1/2}] = \frac{1}{2} \log ab = \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b,$$

also

$$\log \sqrt{ab} - \frac{1}{2} \log b = \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log b = \frac{1}{2} \log a.$$

Beispiel 6. Sie haben ein Kapital von 1000 €, das Sie mit 5 Prozent jährlich verzinsen. Wie lange dauert es, bis sich Ihr Kapital verdoppelt?

Lösung: Wir müssen die Gleichung

$$1.05^x \cdot 1000 = 2000$$

nach x auflösen. Wir erhalten

$$1.05^x = 2$$

also

$$x = \frac{\log 2}{\log 1.05} \approx 14.2067.$$

Es dauert also etwas mehr als 14 Jahre.

1.2 Gleichungen

Ein zentrales Thema der Algebra ist das Lösen von Gleichungen. Ganz einfach ist dies für sogenannte lineare Gleichungen

$$\boxed{a \cdot x = b}$$

Wenn hier $a \neq 0$ ist, können wir beide Seiten der Gleichung durch a dividieren und erhalten als Lösung $x = \frac{b}{a}$.

Die positive Lösung einer Potenzgleichung der Form

$$\boxed{x^a = b,\ b > 0}$$

ist $x = \sqrt[a]{b}$. Beachte: Der Ausdruck $\sqrt[a]{b}$ ist vereinbarungsgemäß immer positiv.

Man beachte den Unterschied zur Exponentialgleichung

$$\boxed{a^x = b,\ a, b > 0}$$

Die Lösung der Exponentialgleichung ist $x = \log_a(b)$.

Beispiel 7.

- Die Lösung von $x^4 = 16$ ist $x = 2$. Die Gleichung $x^4 = -16$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. Deshalb setzen wir für Potenzgleichungen stets $b > 0$ voraus.

- Die Lösung von $3^x = 81$ ist $x = 4$.

Die Lösungen von quadratischen Gleichungen der Form

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0}$$

sollten aus der Schule bekannt sein. Die Lösungen sind

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Machen wir uns noch einmal klar, wie man auf diese

Lösung kommt. Wir setzen $a \neq 0$ voraus:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_\pm &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}
$$

Weil es keine Wurzeln aus negativen Zahlen gibt, kann es passieren, dass eine quadratische Gleichung keine oder nur eine oder zwei Lösungen hat:

- Ist $b^2 - 4ac > 0$, so gibt es zwei Lösungen.
- Ist $b^2 - 4ac = 0$, so gibt es eine Lösung.
- Ist $b^2 - 4ac < 0$, so gibt es keine Lösungen.

Beachten Sie, dass sich die Lösungsformel vereinfacht, wenn $a = 1$ ist. Wir erhalten dann als Lösung der Gleichung

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

die sogenannte p-q-Formel:

$$x_{\pm} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Beispiel 8.

$$2x^2 + 5x = 3$$
$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$
$$x_{\pm} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$
$$x_+ = \frac{1}{2}, \quad x_- = -3$$

Eine **Probe** zeigt

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2}).$$

Manchmal kann man kompliziertere Gleichungen auf quadratische Gleichungen zurückführen.

Wir wollen beispielsweise die Gleichung

$$\boxed{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = 0}$$

lösen $(n > 2)$. Wir klammern dazu x^{n-2} aus und erhalten die Gleichung

$$x^{n-2}(ax^2 + bx + c) = 0.$$

Nun ist ein Produkt von zwei Zahlen genau dann gleich Null, wenn einer der beiden Faktoren gleich Null ist. Wir erhalten als Lösungen also

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Beispiel 9. Finde alle x mit

$$x + 2 = \sqrt{4 - x}. \tag{1}$$

Wir quadrieren beide Seiten und erhalten so

$$(x + 2)^2 = 4 - x.$$

also

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = 4 - x$$

oder

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &= 0 \\ x(5+x) &= 0 \end{aligned}$$

Das geht aber nur für $x = 0$ oder $x = -5$. Wir müssen jetzt aber aufpassen! Durch das Quadrieren der Gleichung haben wir vielleicht unerwünschte neue Lösungen erhalten. Beispiel: $x = -3$, Quadrieren liefert $x^2 = 9$, als Lösungen also $x = \pm 3$, aber $x = 3$ war keine Lösung der ursprünglichen Gleichung! Wir müssen also, wenn wir beim Lösen von Gleichungen quadrieren, mit den erhaltenen Lösungen immer eine Probe machen, d.h. in die ursprüngliche Gleichung einsetzen.

Wir machen also die Probe: Setzen wir 0 in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir $2 = \sqrt{4}$, richtig. Beim Einsetzen von -5 ergibt sich $-3 = \sqrt{9}$, was falsch ist, da die Wurzel stets die positive Wurzel sein soll!

Ungleichungen

Wir schreiben $a < b$ falls a echt kleiner als b ist, also insbesondere $a \neq b$. Wenn wir den Fall $a = b$ auch zulassen wollen, schreiben wir $a \leq b$. Wenn wir $a < b < c$ schreiben meinen wir $a < b$ und $b < c$ (und damit natürlich auch $a < c$. Sinnlos ist ein Ausdruck der Form $a < b > c$!!

In den beiden folgenden Tabellen sind die wesentlichen Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen zusammengefasst:

[SU1]	Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.
[SU2]	Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.
[SU3]	Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.
[SU4]	Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.
[SU5]	Aus $a < b$ folgt $-a > -b$.
[SU6]	Aus $a < b$, $b > 0$ und $0 < c < d$ folgt $ac < bd$.
[SU7]	Aus $0 < a < b$ folgt $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
[SU8]	Aus $a < 0 < b$ folgt $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.
[SU9]	Aus $0 < a < b$ folgt $a^2 < b^2$.

Entsprechend:

[U1]	Aus $a \leq b$ und $b < c$ folgt $a < c$.
[U2]	Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.
[U3]	Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$.
[U4]	Aus $a \leq b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.
[U5]	Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$.
[U6]	Aus $a \leq b$ und $c > 0$ folgt $ac \leq bc$.
[U7]	Aus $a \leq b$ folgt $-a \geq -b$.
[U8]	Aus $a \leq b$, $b > 0$ und $0 < c < d$ folgt $ac < bd$.
[U9]	Aus $a \leq b$, $b > 0$ und $0 < c \leq d$ folgt $ac \leq bd$.
[U10]	Aus $0 < a \leq b$ folgt $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
[U11]	Aus $0 < a \leq b$ folgt $a^2 \leq b^2$.

Lernen Sie diese Regeln bitte nicht stur auswendig! Der Umgang mit Ungleichungen ist weitgehend selbsterklärend, wenn man nur beachtet, dass sich das Ungleichungszeichen "umdreht" wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert (siehe [SU5] und [U7] sowie [SU8] und [U10]). Es sei auch noch einmal auf [SU6] hingewiesen:

Aus $a < b$, $b > 0$ und $0 < c < d$ folgt $ac < bd$

Diese Aussage ist falsch für $b \leq 0$: Setze $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 3$: Dann ist $ac = -2$ **nicht** kleiner als $bd = -3$.

Der Absolutbetrag

Sei a eine reelle Zahl. Manchmal interessiert man sich nur für den Abstand von a zur 0, gleichgültig, ob a positiv oder negativ ist. Diesen Abstand nennt man den Betrag von a:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0. \end{cases}$$

Beachte: $-a > 0$ falls $a < 0$.

Beispiel 10. $|-4| = 4$, $|4| = 4$, $|0| = 0$, $|x^2| \geq 0$

Wir erhalten die beiden folgenden einfachen Regeln

$$\boxed{\begin{array}{rcl} |-a| & = & |a| \\ |a \cdot b| & = & |a| \cdot |b|. \end{array}}$$

Von großer Bedeutung ist die Dreiecksungleichung

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$$

Beispiel 11. • $|3-5| = 2 \leq |3| + |5| = 8$

- $|-2-6| = 8 \leq |-2| + |-6| = 8$ (hier haben wir Gleichheit in der Dreiecksungleichung).

Beispiel 12. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{21+x}{2x} + 1 < 5. \tag{2}$$

Wir formen diese Ungleichung um:

$$\frac{21+x}{2x} < 4$$

Nun müssen wir aufpassen und zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $x > 0$

$$\begin{aligned} 21 + x &< 8x \\ 21 &< 7x \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Fall 2: $x < 0$

$$\begin{aligned} 21 + x &> 8x \quad \text{(weil } x \text{ negativ ist!)} \\ 21 &> 7x \\ 3 &> x \end{aligned}$$

Wir können jetzt aber nicht sagen, die Lösungsmenge besteht aus allen x mit $x < 3$, weil wir die Ungleichung $x < 3$ ja nur unter der Voraussetzung $x < 0$ erhalten haben. Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall also aus allen $x < 0$.

Beachte, dass der Fall $x = 0$ nicht auftreten kann.

Wir erhalten:

Die Ungleichung (2) ist für alle x mit $x < 0$ sowie für alle x mit $x > 3$ gültig.

Beispiel 13. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{x-2}{x-1} < \frac{x+1}{x+2} \tag{3}$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $(x-1)(x+2)$, um die Brüche zu beseitigen. Wir können das aber nur dann sorglos tun, wenn dieser Ausdruck positiv ist. Das ist der Fall für $x > 1$ sowie für $x < -2$.

Fall 1: $x > 1$ oder $x < -2$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x-1} &< \frac{x+1}{x+2} \\ (x-2)(x+2) &< (x-1)(x+1) \\ x^2-4 &< x^2-1 \\ -4 &< -1 \end{aligned}$$

Das bedeuet, dass die Ungleichung (3) für alle x mit $x > 1$ oder $x < -2$ gültig ist.

Fall 2: $-2 < x < 1$
Nun gilt

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x-1} &< \frac{x+1}{x+2}\\ (x-2)(x+2) &> (x-1)(x+1)\\ x^2-4 &> x^2-1\\ -4 &> -1\end{aligned}$$

und das ist ganz offensichtlich nie erfüllt.

Beachte auch hier wieder, dass die Fälle $x = -2$ sowie $x = 1$ nicht behandelt werden müssen, da die in der Ungleichung auftretenden Ausdrücke in den Fällen gar nicht erklärt sind.

Wir halten fest: Die Ungleichung (3) ist gültig für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -1$ und mit $x > 2$.

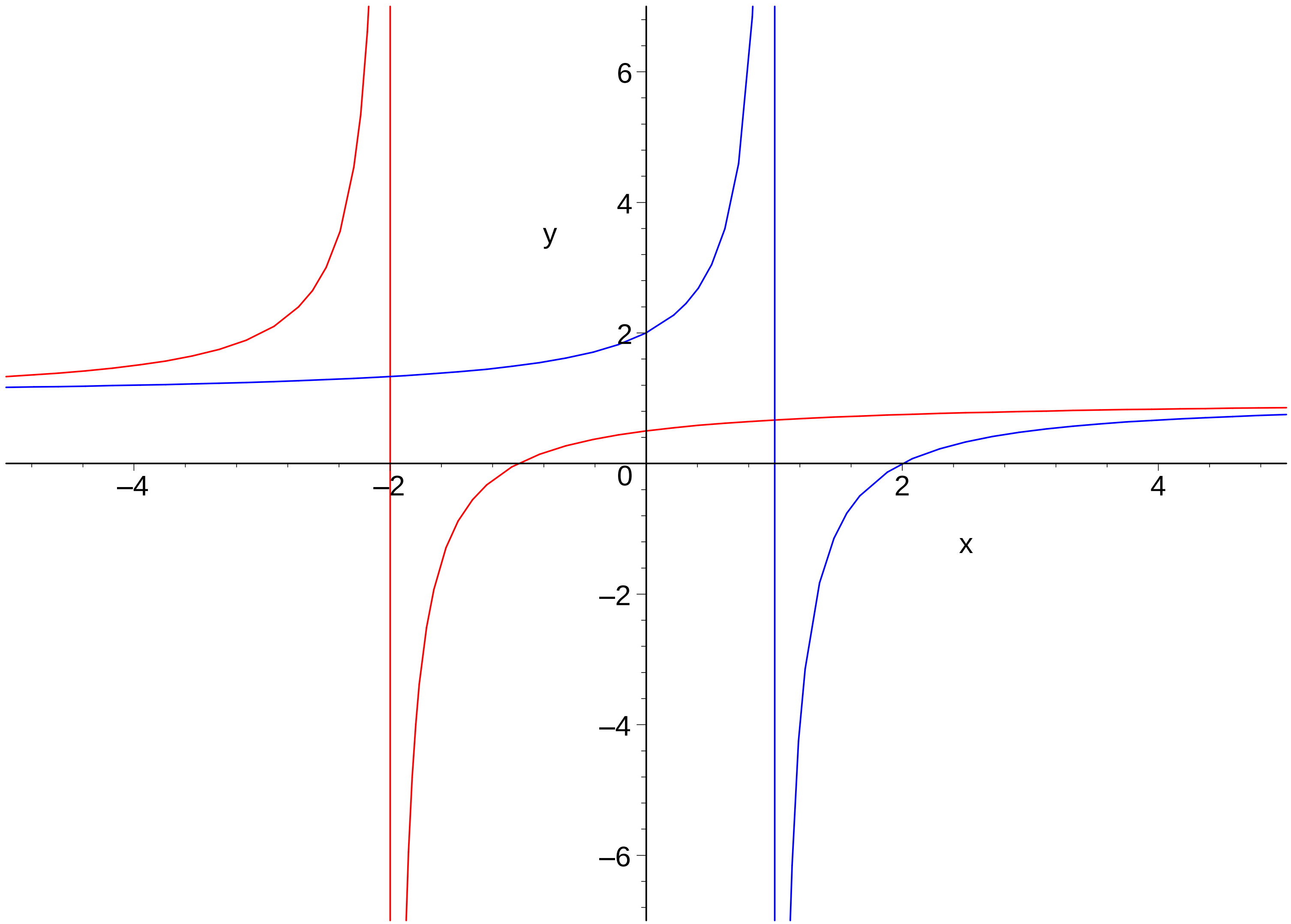
Wenn Sie wollen, können Sie durch Einsetzen von Werten dieses Ergebnis erhärten:

$x = 0.3$: Berechne zunächst die linke Seite $\frac{-1.7}{-0.7} = \frac{17}{7}$, dann die rechte Seite von (3): $\frac{1.3}{2.3} = \frac{13}{23}$. Offensichtlich ist die linke Seite größer als die rechte Seite, die Ungleichung gilt also für $x = 0.3$ nicht.

$x = -2.1$: Wir erhalten

$$\frac{-4.1}{-3.1} = \frac{41}{31} < \frac{-1.1}{-0.1} = 11.$$

Die folgende Skizze illustriert das noch einmal: der blaue Graph beschreibt die linke Seite, der rote Graph die rechte Seite der Ungleichung.


y
x
–4
–2
0
2
4
6
–6

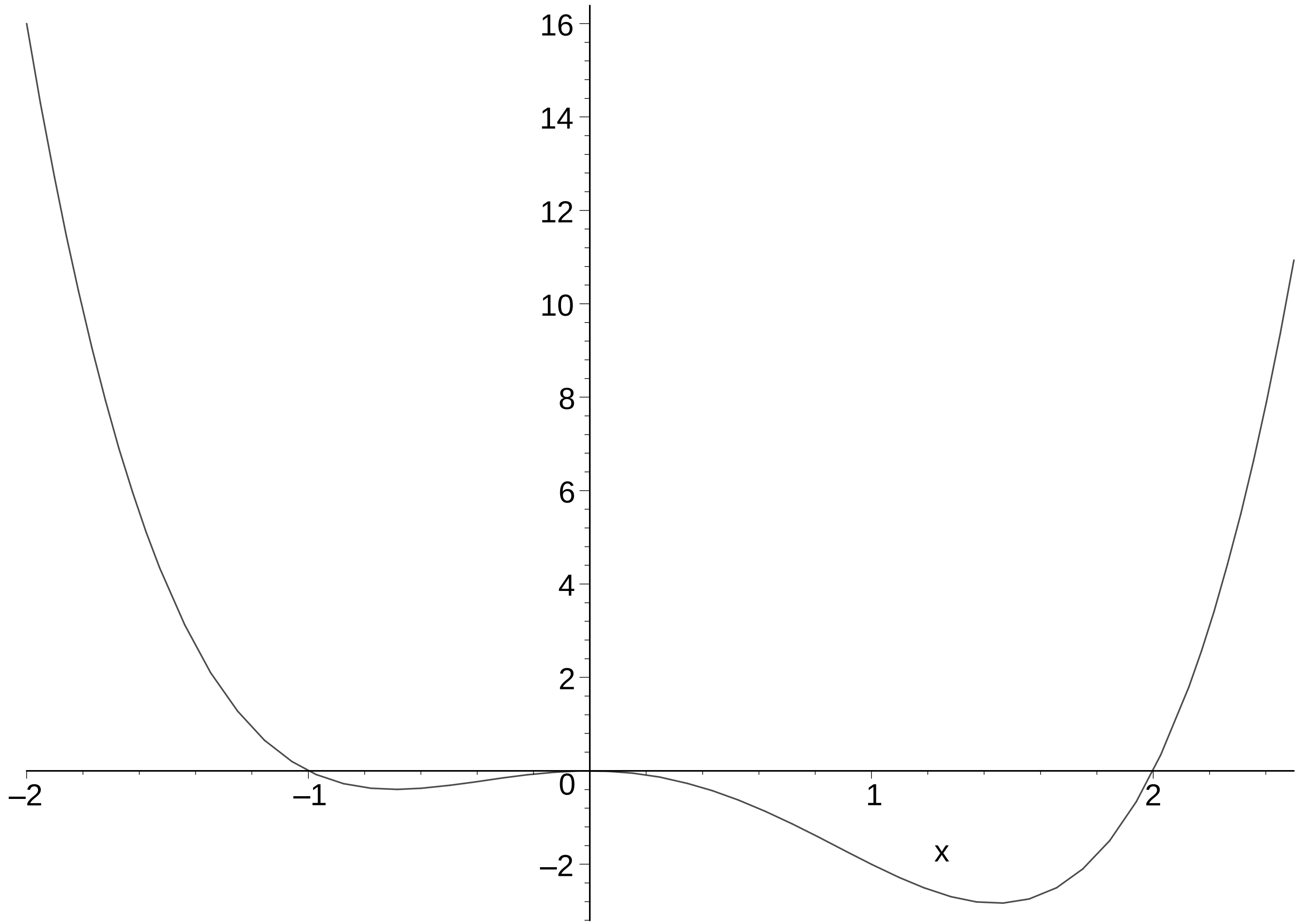
Beispiel 14. Bestimme alle x mit

$$x^4 - x^3 - 2x^2 > 0. \tag{4}$$

Um dieses Problem zu lösen, versuchen wir, die linke Seite der Ungleichung zu faktorisieren. Wir können zunächst x^2 ausklammern und bekommen

$$x^2(x^2 - x - 2) > 0.$$

Nun faktorisieren wir x^2-x-2. Wir können das machen, indem wir die Nullstellen bestimmen. Die Nullstellen sind 2 und -1, also $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Wir müssen also alle x bestimmen mit $x^2(x-2)(x+1) > 0$. Das Produkt von 3 Zahlen (hier x^2, $x-2$ und $x+1$) ist größer als 0 wenn alle Zahlen > 0 sind oder wenn nur eine Zahl > 0 ist, die anderen beiden < 0. Alle Zahlen sind grö sser als 0 wenn $x > 2$ ist. Zwei Zahlen sind < 0 für $x < -1$. Also: Die Ungleichung (4) ist für $x > 2$ sowie für $x < -1$ gültig. Auch dies wird durch eine Skizze verdeutlicht:


16
14
12
10
8
6
4
2
0
–2
–2
–1
1
2
x

Summen- und Produktzeichen

Ein großer Vorteil der sehr formalen mathematischen Sprache ist es, komplizierte Zusammenhänge einfach und klar ausdrücken zu können. Gerade auch diese Eigenschaft der Mathematik macht sie zu einer geeigneten Hilfswissenschaft der Wirtschaftswissenschaften.

Seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Dann schreiben wir statt

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

auch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

(gelesen: Summe der a_i mit i von 1 bis n). Der Laufindex i heisst Summationsindex, 1 und n sind die untere und obere Schranke. Die untere Schranke muss nicht 1 sein:

$$\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 9 + 16 + 25 = 50.$$

Folgende einfachen Regeln gelten für den Umgang mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{i=k}^{n} a = (n-k+1)a \quad (a \text{ ist konstant!})$$

$$\sum_{i=k}^{n} c a_i = c \sum_{i=k}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=k}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$

für $k \leq m < n$.

Beispiel 15. Eine Unternehmensgruppe produziert n Güter. Sei $u_{i,j}$ der Umsatz, den das Unternehmen mit dem Gut i im Monat j macht. Der Index j bezeichne einen Monat und laufe von 1 bis m. Wir erhalten so eine Matrix oder ein Rechteckschema mit n Zeilen und m Spalten. Die Spalten bezeichnen die Monate, die Zeilen die Güter. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{m} u_{i,j} \quad \text{Gesamtumsatz von Gut } i$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} \quad \text{Gesamtumsatz im Monat } j$$

Wenn wir den Gesamtumsatz über alle Monate ausrechnen wollen, müssen wir die Zahlen addieren.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} u_{i,j}\right) \tag{5}$$

oder

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right) \tag{6}$$

Solche Summen nennt man Doppelsummen. Natürlich muss in beiden Fällen (5) und (6) dasselbe herauskommen, also

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)$$

Wenn die Summationsgrenzen bekannt sind, schreibt man auch einfach

$$\sum_{i,j} u_{i,j}$$

Wir halten fest:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)}$$

Es gilt aber im allgemeinen **nicht** $\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Setze dazu einfach die in folgender Tabelle enthaltenen Werte ein:

	$i=1$	$i=2$
a	2	3
b	4	1

Wir haben

$$\sum_{i=1}^{2} a_i \sum_{i=1}^{2} b_i = 5 \cdot 5 = 25$$

aber

$$\sum_{i=1}^{2} (a_i b_i) = 8 + 3 = 11.$$

Ähnlich wie das Summenzeichen kann man das Produktzeichen $\prod$ einführen:

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_n.$$

Das Produktzeichen ist etwas weniger gebräuchlich als das Summenzeichen. Hier sind einfache Rechenregeln für den Umgang mit Π:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \displaystyle\prod_{i=k}^{n} a & = & a^{n-k+1} \\ \displaystyle\prod_{i=k}^{n} c a_i & = & \displaystyle c^{n-k+1} \prod_{i=k}^{n} a_i \\ \displaystyle\prod_{i=k}^{n} (a_i \cdot b_i) & = & \displaystyle\prod_{i=k}^{n} a_i \cdot \prod_{i=k}^{n} b_i \\ \displaystyle\prod_{i=k}^{n} {a_i}^2 & = & \displaystyle(\prod_{i=k}^{n} a_i)^2 \end{array}}$$

Die folgende Ungleichung (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) ist manchmal sehr nützlich:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2) \cdot (\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2)}$$

Beispiel 16. Setzen Sie die Zahlen

	$i = 1$	$i = 2$
a	2	3
b	4	1

ein und Sie erhalten

$$(8+3)^2 = 121 \leq (2^2+3^2)\cdot(4^2+1^2) = 13\cdot 17 = 221.$$

Man kann auch Gleichheit haben. Wähle

	$i = 1$	$i = 2$
a	2	-1
b	4	-2

und erhalte

$$(8+2)^2 = 100 = (2^2+(-1)^2)\cdot(4^2+(-2)^2) = 5\cdot 20 = 100$$

1.3 Aussagen und Mengen

In der Mathematik geht es um Aussagen. Eine Aussage ist ein “statement”, das entweder wahr oder falsch sein kann. Beides geht nicht! Äusserungen, die nicht die Eigenschaft haben, wahr oder falsch zu sein, gelten nicht als Aussagen.

Beispiel 17.
- “Das Bruttosozialprodukt der Bundesrepublik Deutschland ist höher als das der USA” ist eine offenbar **falsche** Aussage.

- “Gute Nacht, Freunde” ist **keine** Aussage.

Häufig hängen Aussagen auch von variablen Parametern x ab. Wir sprechen dann von Aussageformen $A(x)$.

Beispiel 18. “Für alle natürlichen Zahlen x gilt: x ist Primzahl” ist eine offenbar **falsche** Aussage.

Eine **richtige** Aussage wäre:

“Für alle natürlichen Zahlen x gilt, dass x nicht negativ ist.”

Ein anderes Beispiel einer Aussageform ist: “Unter allen Gütern gibt es ein Gut x, dessen Preis sich verändert”.

Für Aussageformen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$A(x)$ gilt **für alle** x:	$\bigwedge\limits_{x} A(x)$
$A(x)$ gilt **für ein** x:	$\bigvee\limits_{x} A(x)$

Interessant wird es, wenn man Aussagen A und B miteinander verknüpft. Der Wahrheitswert der verknüpften Aussage hängt vom Wahrheitswert von A und B ab. Wir wollen das am Beispiel erläutern:

Beispiel 19. Die Aussage "Franz studiert Wirtschaftswissenschaften oder Mathematik" ist wahr, wenn Franz **mindestens eines** der beiden Fächer Wirtschaft oder Mathematik studiert, eventuell auch beide. Die Aussage ist Verknüpfung der beiden Aussagen "Franz studiert Wirtschaftswissenschaften" sowie "Franz studiert Mathematik" durch ein oder.

Beachte: Die Aussage "Franz studiert Wirtschaftswissenschaften oder Mathematik" ist auch wahr, wenn Franz ganz fleissig ist und sowohl Wirtschaftswissenschaften als auch Mathematik studiert. Es handelt sich beim mathematischen **nicht** um ein entweder-oder.

Konjunktion

Seien A und B zwei Aussagen. Dann ist die Aussage A und B, geschrieben $A \wedge B$ **wahr**, wenn beide Aussagen wahr sind. Die Aussage A und B ist **falsch**, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A, B falsch ist. Man nennt dies auch die Konjunktion der Aussagen A und B.

Disjunktion

Seien A und B zwei Aussagen. Dann ist die Aussage A oder B, geschrieben $A \vee B$ **wahr**, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist. Die Aussage A oder B ist **falsch**, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Man nennt dies auch die Disjunktion der Aussagen A und B.

Man stellt dies häufig auch durch sogenannte Wahrheitstafeln dar. Das ist eine Tabelle, in die wir die möglichen Wahrheitswerte von A und B eintragen und dann die entsprechenden Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen auswerten. Hier ist die Wahrheitstafel für die Konjunktion:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

und hier die für die Disjunktion:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Kehrt man eine Aussage in ihr Gegenteil um, erhält man die Negation der Aussage. Bezeichnung: $\overline{A}$. Klar ist, das eine negierte wahre Aussage falsch wird und umgekehrt.

Beispiel 20. Wir wollen die Aussage A "Deutschland ist Exportweltmeister und Fussballvizeweltmeister" negieren, d.h. wir suchen die Aussage, die wahr ist genau in den Fällen, in denen A falsch ist. A ist falsch, wenn eine der beiden Teilaussagen falsch ist, wenn also Deutschland nicht Exportweltmeister **oder** nicht Vizeweltmeister ist.

Dieses Beispiel zeigt, wie wir eine Konjunktion negieren:

$$\boxed{\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}}$$

Ähnlich sieht es mit der Negation der Disjunktion aus:

$$\boxed{\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}}$$

Das Gleichheitszeichen soll hier bedeuten, dass die Aussagen auf den beiden Seiten denselben Wahrheitswert haben (also wahr oder falsch sind), wenn für A und B auf beiden Seiten die selben Aussagen eingesetzt werden.

Schwierigkeit bereitet manchmal die Negation einer "für alle" sowie "es gibt ein" Aussage.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{\bigwedge_x A(x)} & = & \bigvee_x \overline{A(x)} \\ \overline{\bigvee_x A(x)} & = & \bigwedge_x \overline{A(x)} \end{array}}$$

Umgangssprachlich: Wenn eine Aussage $A(x)$ nicht für alle x gilt, dann muß es ein x geben, für das diese Aussage nicht gilt. Und wenn es kein x gibt für das eine Aussage $A(x)$ wahr ist, dann ist $A(x)$ für alle x falsch.

Beispiel 21. Sei $A(x)$ die Aussage

"Der Preis des Gutes x ist konstant".

Wir wollen uns alle Aussagen anschauen, die wir mit $A(x)$ mittels Negation sowie $\bigwedge$ und $\bigvee$ bilden können:

$\bigwedge\limits_x A(x)$	Die Preise aller Güter bleiben konstant.
$\bigwedge\limits_x \overline{A(x)}$	Die Preise aller Güter verändern sich.
$\overline{\bigwedge\limits_x A(x)}$	Nicht für alle Güter bleiben die Preise konstant.
$\overline{\bigwedge\limits_x \overline{A(x)}}$	Nicht für alle Güter verändern sich die Preise.
$\bigvee\limits_x A(x)$	Der Preis mindestens eines Gutes bleibt konstant.
$\bigvee\limits_x \overline{A(x)}$	Der Preis mindestens eines Gutes verändert sich.
$\overline{\bigvee\limits_x A(x)}$	Der Preis keines Gutes bleibt konstant.
$\overline{\bigvee\limits_x \overline{A(x)}}$	Der Preis keines Gutes verändert sich.

Beachten Sie, dass hier die erste und achte, die zweite und siebte, die dritte und sechste sowie die vierte und fünfte Aussage jeweils gleich sind.

Implikation und Äquivalenz

Die Implikation (geschrieben $A \Rightarrow B$) ist falsch, wenn A wahr ist, B aber falsch. In allen anderen Fällen ist die Implikation wahr. Sprechweise: Wenn A, dann B.

Wahrheitstabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Das ist etwas gewöhnungsbedürftig, weil $A \Rightarrow B$ wahr ist wenn A falsch ist (Aus etwas falschem darf man alles folgern).

Gilt $A \Rightarrow B$ **und** $B \Rightarrow A$, so nennt man die beiden Aussagen äquivalent. Bezeichnung: $A \Leftrightarrow B$. Die zugehörige Wahrheitstafel ist

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Zwei Aussagen heißen also äquivalent, wenn sie beide wahr oder beide falsch sind.

Beispiel 22. Betrachte die Aussage

“Wenn die Inflation steigt, dann sinkt die Arbeitslosenquote.”

Wir überlegen uns, welche der folgenden Aussagen dazu äquivalent sind:

1. Damit die Arbeitslosenquote sinkt, muss die Inflation steigen.

2. Eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Arbeitslosenquote sinkt, ist ein Anstieg der Inflation.

3. Die Arbeitslosenquote kann nur fallen wenn die Inflation steigt.

4. Wenn die Arbeitslosenquote nicht sinkt, dann steigt die Inflation nicht.

5. Die Inflation kann nur steigen wenn die Arbeitslosenquote sinkt.

Offensichtlich bestehen alle diese Aussagen aus zwei Teilaussagen

Die Arbeitslosenquote sinkt (Aussage A)

und

Die Inflation steigt. (Aussage B).

Diese Aussagen sind unterschiedlich verknüpft. Wir wollen die Wahrheitstafeln für diese Verknüpfungen aufstellen. Die ursprüngliche Aussage lautet $B \Rightarrow A$, und ihr Wahrheitswert wird zunächst bestimmt:

A	B	$B \Rightarrow A$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	f	w	w
f	w	f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w

Also sind die Aussagen (2), (4) und (5) äquivalent zur ursprünglichen Aussage.

Wir wollen die Aussagen (1) bis (5) noch einmal analysieren:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \Rightarrow B \\
(2) & B \Rightarrow A \\
(3) & A \Rightarrow B \\
(4) & \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \\
(5) & B \Rightarrow A
\end{array}
$$

Besonders interessant ist hier das vierte statement. Es zeigt, dass die Aussagen $B \Rightarrow A$ und $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ äquivalent sind. Wir wollen das noch einmal ganz deutlich herausstellen:

$$\boxed{\begin{array}{c} (A \Rightarrow B) \text{ ist äquivalent zu } (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \\[1em] (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \end{array}}$$

Einige Bemerkungen zu mathematischen Beweisen

In der Mathematik hat man es stets mit Aussagen zu tun, die wahr oder falsch sind. Beispielsweise gilt für alle reelle Zahlen $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Woher weiß man das? Man kann doch nicht alle reellen Zahlen einsetzen und schauen, ob diese Gleichung immer richtig ist. Das ist auch nicht nötig, denn man kann einen mathematischen Beweis für diese Aussage angeben. Ein Beweis für eine Aussage A ist eine Folge logischer Schlüsse, beginnend mit einer wahren Aussage B, an deren Ende A steht. Sie zeigen also die Gültigkeit der Aussage $B \Rightarrow A$, wobei B aber eine wahre Aussage sein muss. Denn bedenken Sie: Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern, also auch etwas Falsches. Sie wollen aber in einem Beweis ja gerade zeigen das etwas stimmt, also richtig ist.

Sie dürfen, um eine Aussage A zu beweisen, auch nicht einfach von der Gültigkeit von A ausgehen und dann logisch auf die Gültigkeit einer wahren Aussage schließen und das als einen Beweis ansehen.

Beispiel 23. Angenommen, jemand behauptet $3 = 4$. Wenn wir die Gültigkeit dieser Aussage annehmen, können wir ja beide Seiten der Gleichung mit 0 multiplizieren. Wir erhalten so die Gleichung $0 = 0$, die offenbar wahr ist. Ist deshalb aber $3 = 4$ wahr? Natürlich nicht, weil wir von einer Aussage A auf etwas Wahres (die Aussage $0 = 0$) geschlossen haben. Aber aus der Gültigkeit von $0 = 0$ kann man natürlich nicht auf die Gültigkeit von A schlussfolgern.

Beispiel 24. Wir wollen die folgende Aussage beweisen:

Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt

$$\frac{|x+1|}{x} \geq \frac{|x-1|}{x}.$$

Fall 1: $x > 0$
Dann ist $x + 1 = |x + 1| > x - 1$, aber auch $x + 1 > -(x - 1) = 1 - x$, weil $x > -x$ für $x > 0$, den Fall, den wir gerade betrachten. Weil $x + 1 > x - 1$ und $x + 1 > -(x-1)$, gilt sogar $|x + 1| = x+1 > |x - 1|$. Wir dürfen beide Seiten dieser Ungleichung durch x dividieren, ohne dass sich das Ungleichungszeichen ändert, weil $x > 0$. Das zeigt

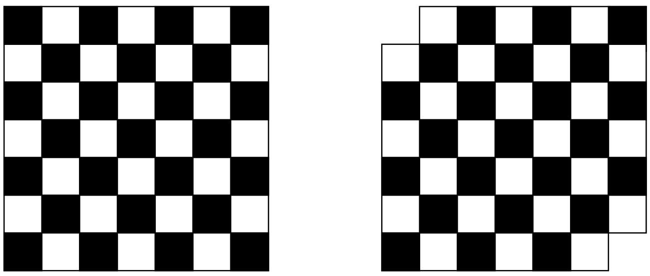
$$\frac{|x+1|}{x} > \frac{|x-1|}{x}.$$

Fall 2: $x < 0$
Jetzt ist $|x - 1| = 1 - x$. Wir haben $1 - x > x + 1$ (weil $x < 0$) und $1 - x > -(x + 1) = -x - 1$. Damit $|x - 1| = 1-x > |x + 1|$. Teilen wir die linke und rechte Seite dieser Ungleichung durch x, so dreht sich das Ungleichungszeichen wegen $x < 0$ um und wir erhalten wie im Fall 1

$$\frac{|x-1|}{x} < \frac{|x+1|}{x}.$$

Das nächste Beispiel zeigt deutlich die Aufgabe eines mathematischen Beweises: Ein Beweis soll einen zweifelsfreien Grund angeben, warum eine Aussage richtig ist.

Beispiel 25. Wir wollen die folgende Behauptung beweisen: Wenn in einem Schachbrett die diagonal gegenüberliegenden Eckfelder entfernt werden, kann das so entstehende Brett nicht mit Dominosteinen überdeckt werden, wobei jeder Dominostein genau zwei Felder des Schachbrettes überdeckt.



Der Beweis ist ganz einfach: Jeder Dominostein überdeckt genau ein weißes und ein schwarzes Feld. Aber das Schachbrett, bei dem die Eckfelder entfernt wurden, hat nicht die gleiche Zahl weißer und schwarzer Felder!

Manche Nicht-MathematikerInnen sind versucht, die Gültigkeit einer Aussageform $A(x)$ zu beweisen, indem die Gültigkeit von $A(x)$ für einige wenige Werte von x nachgerechnet wird. Das ist natürlich kein Beweis!

Beispiel 26. Angenommen, jemand behauptet n^2+n+

41 sei für alle natürlichen Zahlen n eine Primzahl. Wir setzen ein und erhalten, dass n^2+n+41 eine Primzahl für alle Zahlen n zwischen 0 und 40 ist. Ist das ein Beweis? Nein! Außerdem ist die Aussage, dass n^2+n+41 für alle natürlichen Zahlen eine Primzahl ist, falsch: Setzen Sie einfach $n = 41$ ein! Wir haben somit ein Gegenbeispiel gefunden.

Etwas formaler. Wir hatten die Aufgabe zu entscheiden, ob eine Aussage $A(x)$ für alle x gilt. Um zu beweisen, dass die Aussage stets gilt, benötigen wir einen Beweis. Wenn wir aber zeigen wollen, dass die Aussage nicht immer gilt, genügt es, ein x so anzugeben, dass $A(x)$ falsch ist. Wir haben damit die Allgemeingültigkeit widerlegt. Im obigen Beispiel können wir die Behauptung, jede Zahl der Form $n^2 + n + 41$ sei ein Primzahl, widerlegen, denn für $n = 41$ ist n^2+n+41 offensichtlich keine Primzahl!

Halten wir fest:

> Die Gültigkeit einer Aussage $A(x)$ kann man **nicht** beweisen, indem man die Gültigkeit für einige Werte von x überprüft. Man kann aber zeigen, dass die Aussage $A(x)$ nicht allgemeingültig ist, wenn man nur ein Gegenbeispiel angibt, also ein x_g, für das $A(x_g)$ falsch ist.

In den Wirtschaftswissenschaften werden Sie selten Beweise im mathematisch strengen Sinne finden. Der mathematische Beweis benötigt exakt angegebene Voraussetzungen, unter denen er funktioniert. Diese Voraussetzungen sind in den Wirtschaftswissenschaften häufig nicht so klar formulierbar.

Viel häufiger tritt das Phänomen auf, dass man Aussagen wiederlegt! Kehren wir zurück zu unserem Beispiel 22. über den Zusammenhang zwischen Arbeitslosenquote und Inflation. Dieser Zusammenhang ist heutzutage eindeutig durch etliche Gegenbeispiele widerlegt. Bis in die 80'er Jahre hinein wurde ein solcher Zusammenhang aber vermutet!

Mengen

Ein zentrales Konzept für die Mathematik ist der Begriff der Menge.

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte . Von jedem dieser Objekte muss eindeutig feststehen, ob das Objekt zur Menge gehört oder nicht. Die Objekte heißen Elemente der Menge

Ist a ein Element der Menge M, schreiben wir auch

$$\boxed{a \in M}$$

andernfalls

$$\boxed{a \notin M}$$

Die Elemente einer Menge sind alle verschieden.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, Mengen zu beschreiben. Wir wollen die Menge M aller geraden ganzen Zahlen zwischen 2 und 15 beschreiben:

1. **Aufzählung**
   $M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

2. **teilweise Aufzählung**
   $M = \{2, 4, 6, \ldots, 12, 14\}$ Hierbei muss man aufpassen, dass es nicht zu Missverständnissen kommt.

3. **Beschreibung durch charakteristische Eigenschaften**
   $M := \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ und } x \geq 2 \text{ und } x \leq 15 \text{ und } x \text{ gerade}\}$.

Die leere Menge $\emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält.

Beispiel 27. $\emptyset = \{x : x$ wohnt in der Bundesrepublik Deutschland und x ist im Jahre 1700 geboren$\}$

Die Mächtigkeit oder Ordnung einer Menge ist die Anzahl der Elemente in der Menge. Unsere oben betrachtete Menge $M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ hat also die Mächtigkeit 7.

Schreibweise: $|M| =$ Anzahl Elemente in M.

Falls M unendlich viele Elemente hat, schreiben wir $|M| = \infty$ (∞: unendlich).

Beziehungen zwischen Mengen

Wir nennen A eine Teilmenge von B, wenn jedes Element aus A auch ein Element von B ist. Dabei darf auch $A = B$ gelten.

$$A \subseteq B: \ A \text{ Teilmenge von } B$$
$$A \subsetneq B: \ A \text{ Teilmenge von } B \text{ und } A \neq B$$

Beachte, dass stets $A \subseteq A$ gilt. Ferner gilt für alle Mengen $\emptyset \subseteq A$.

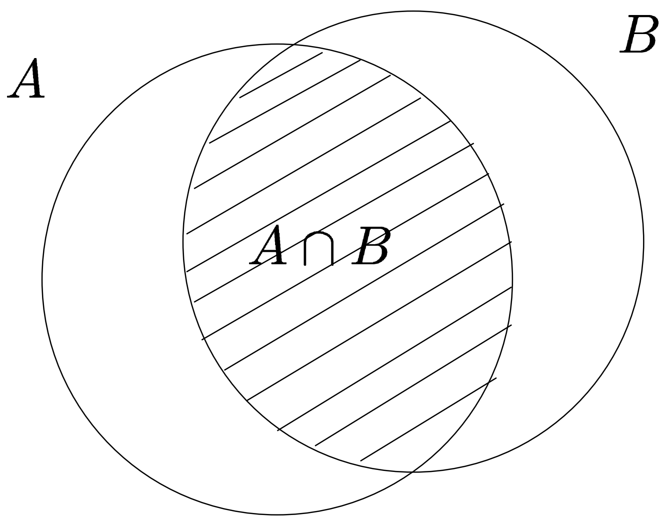
Beispiel 28. • $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

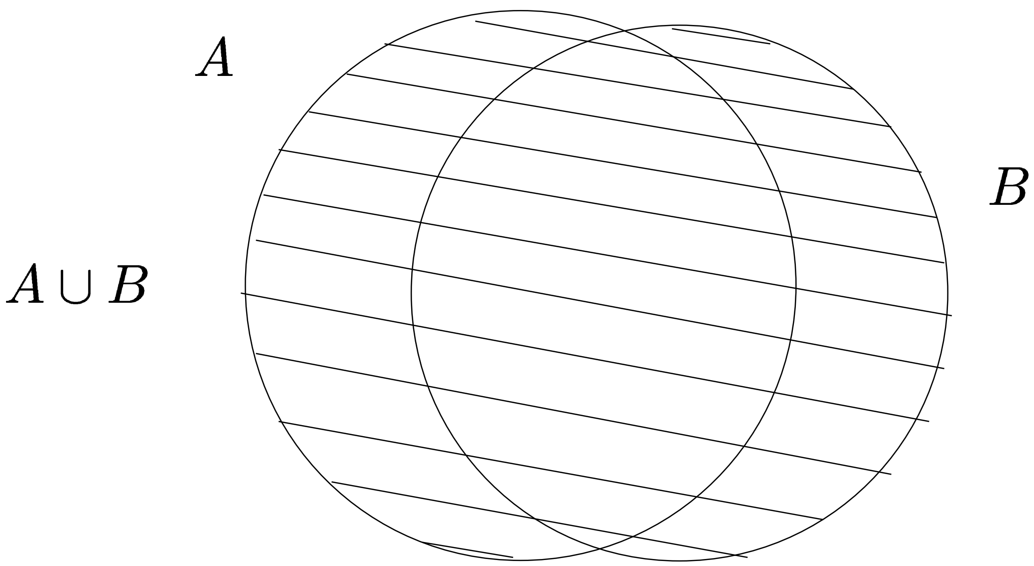
- Die Menge aller Einwohner Magdeburgs ist eine Teilmenge der Menge aller Einwohner Deutschlands .

Verknüpfung von Mengen

Wir können Mengen schneiden oder vereinigen.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} A \cup B & = & \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} \text{ Vereinigung} \\ A \cap B & = & \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} \text{ Schnitt} \end{array}}$$





Achtung: Es gilt **nicht** $|A \cup B| = |A| + |B|$, sondern

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$

Zwei Mengen heißen disjunkt, wenn ihr Schnitt leer ist.

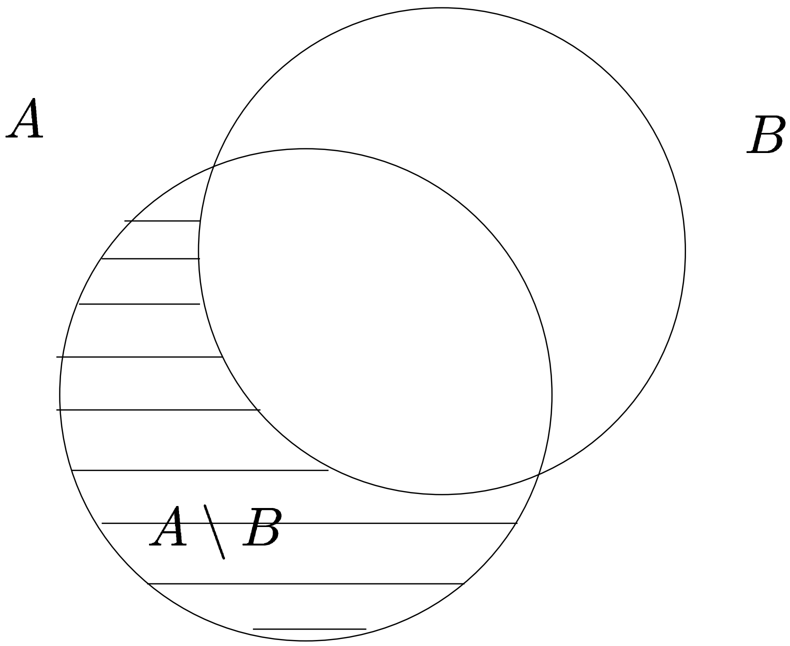
$$\boxed{\text{Für disjunkte Mengen gilt } |A \cup B| = |A| \cup |B|}$$

Manchmal wollen wir mehr als nur eine Menge vereinigen oder schneiden. Wir schreiben dann

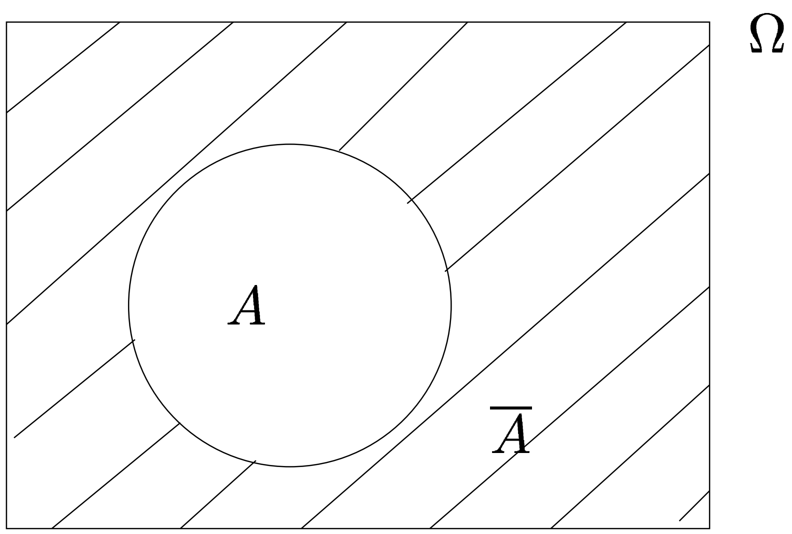
$$\boxed{\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \end{aligned}}$$

Die Differenz von Mengen ist wie folgt definiert:

$$\boxed{A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}}$$



Ist A eine Teilmenge von Ω, so schreiben wir statt $\Omega \setminus A$ auch $\overline{A}$ oder, genauer, $\overline{A}_\Omega = \Omega \setminus A$:



Beispiel 29. Wir betrachten die folgenden vier Mengen:

$$
\begin{aligned}
A &= \{x : x \in \mathbb{R} \text{ und } 1 \leq x \leq 6\} \\
B &= \{x : x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 6\} \\
C &= \{x : x \in \mathbb{N} \text{ und } x \geq 2\} \\
D &= \{x : x \in \mathbb{R} \text{ und } x < 6\}
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
A \setminus D &= \{6\} \\
A \cap C &= \{2, 3, 4, 5, 6\} \\
C \setminus A &= \{x : x \in \mathbb{N} \text{ und } undx > 6\} \\
B \cap C &= \{2, 3, 4, 5\} \\
B \cup C &= \mathbb{N} \\
A \cap \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
\overline{A}_{\mathbb{R}} &= \{x : x \in \mathbb{R} \text{ und } (x < 1 \text{ oder } x > 6\} \\
\overline{B}_{\mathbb{N}} &= \{6, 7, 8, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Mengenalgebra

Ähnlich wie für die Verknüpfung von Aussagen gibt es auch gewisse Rechenregeln für die Verknüpfung von Mengen.

Wir geben im folgenden die wichtigsten Regeln an:

Idempotenzgesetze

$$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

Kommutativgesetze

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

Assoziativgesetze

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

Distributivgesetze

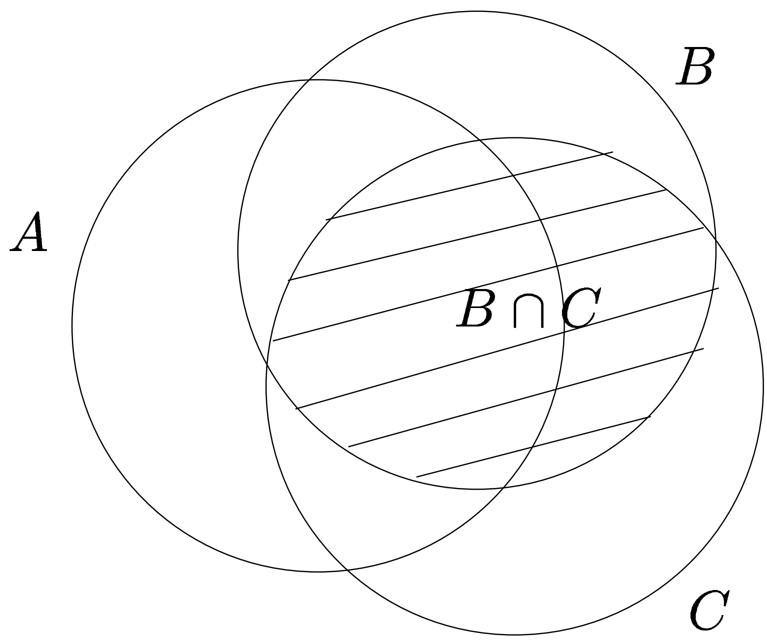
$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

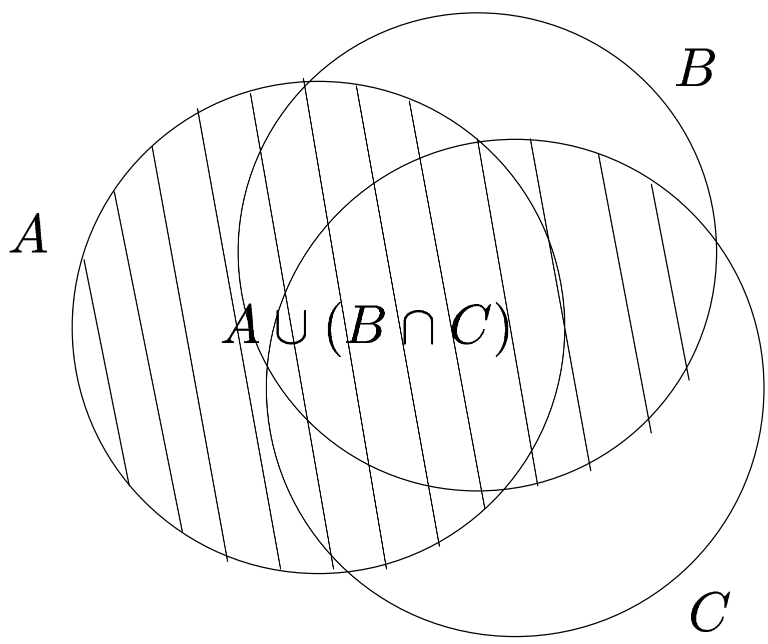
Inklusionsgesetze

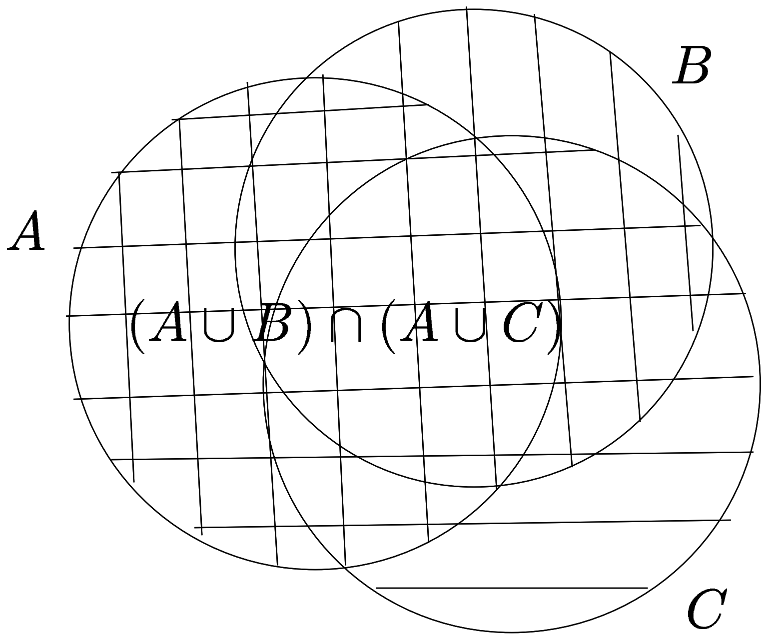
$$\begin{aligned} A &\subset A \cup B \\ A \cap B &\subset A \end{aligned}$$

Man macht sich diese Regeln am besten an Hand einiger Mengendiagramme (Venn-Diagramm) klar. Wir illustrieren hier nur das erste Distributivgesetz.

Im ersten Diagramm sehen wir die Menge $B \cap C$ schraffiert. Danach vereinigen wir diese Menge mit A. Im letzten Bild haben wir die Mengen $A \cup B$ und $A \cup C$ jeweils unterschedlich schraffiert und dadurch auch gleich den Schnitt $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ gekennzeichnet.







Ähnliche Gesetze gelten für die Komplementbildung und die Mengendifferenz, wir verweisen hier auf [SCHWARZE, R 4.4.3 und R 4.4.8.]

Neue Mengen aus alten Mengen

Die Potenzmenge einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Bezeichnung: $\mathcal{P}(A)$.

Ist A endlich, so gilt

$$\boxed{|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.}$$

Seien $a_1, \ldots a_n$ irgendwelche Elemente. Wir nennen

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

ein n-Tupel. Die Elemente müssen nicht unbedingt verschieden sein.

Die Menge aller n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ heißt das kartesische Produkt von $A_1, \ldots, A_n$. Bezeichnung: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Beispiel 30. Sei $A = \{1,2\}$ und $B = \{a,b\}$ und $C = \{b,c\}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),\\
&\qquad (2,b),(2,c)\}\\
(A \times B) \cup (A \times C) &= \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),\\
&\qquad (1,c),(2,c)\}\\
A \times (B \cap C) &= \{(1,b),(2,b)\}\\
(A \times B) \cap (A \times C) &= \{(1,b),(2,b)\}
\end{aligned}
$$

Dieses Beispiel legt nahe (und man kann es auch beweisen), dass

$$\boxed{A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)}$$

gilt. Im allgemeinen ist $A \times B \neq B \times A$