1.4 Relationen und Abbildungen

Die Definition einer Relation ist ganz einfach:

> Eine Relation R zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$. Gilt $X = Y$, so heißt R eine Relation auf X. Man schreibt $x\, R\, y$ falls $(x, y) \in R$.

Beispiel 31.

- X: Menge der MathematikerInnen.
  Y :Menge der WirtschaftswissenschaftlerInnen.
  Eine Relation zwischen X und Y wird z.B. durch Mathematiker x ist jünger als y erklärt.

- Sei X die Menge aller Frauen, Y die Menge aller Männer. Als Relation zwischen X und Y wählen wir verheiratet.

- $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Dann ist

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}.$$

  Wir erhalten z.B. folgende Relationen:

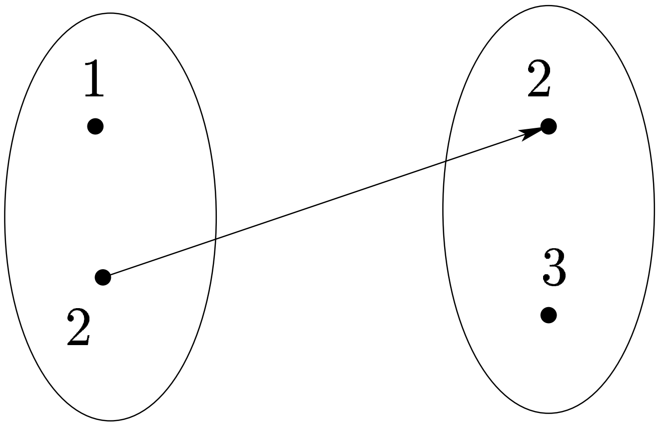
$$R_1 = \{(a,b) \in A \times B : a = b\} = \{(2,2)\}$$

$$R_2 = \{(a,b) \in A \times B : a < b\} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

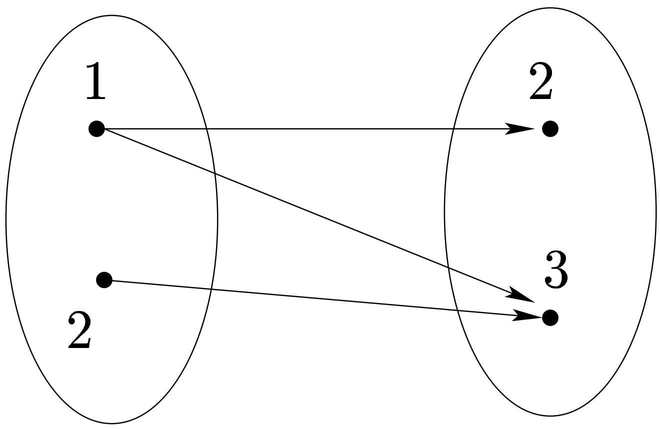
$$R_3 = \{(a,b) \in A \times B : a \leq b\} = \\ = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,2)\} = A \times B$$

$$R_4 = \{(a,b) \in A \times B : a + b = 2\} = \emptyset$$

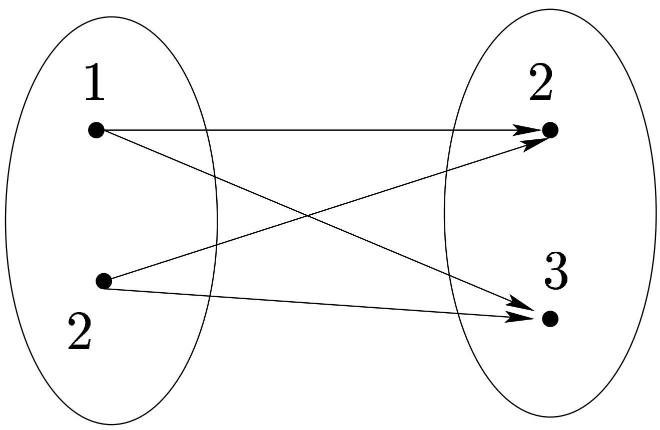
Man kann diese Relationen auch durch Graphen verdeutlichen. Dazu malen wir die Menge A und die Menge B auf und verbinden zwei Elemente mit einem Pfeil genau dann wenn sie in Relation miteinander stehen:



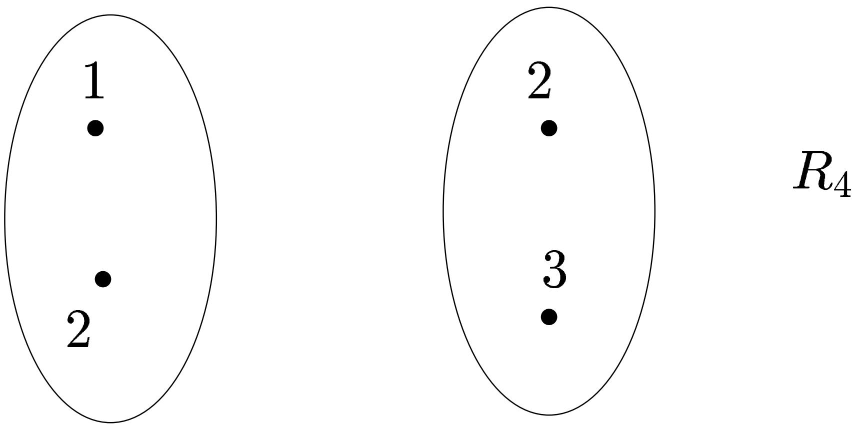
R_1



R_2



R_3



Diese Beispiele zeigen, dass an jedem Punkt kein, ein oder mehrere Pfeile beginnen können. Genauso kann an jedem Punkt kein, ein oder mehrere Punkte ankommen.

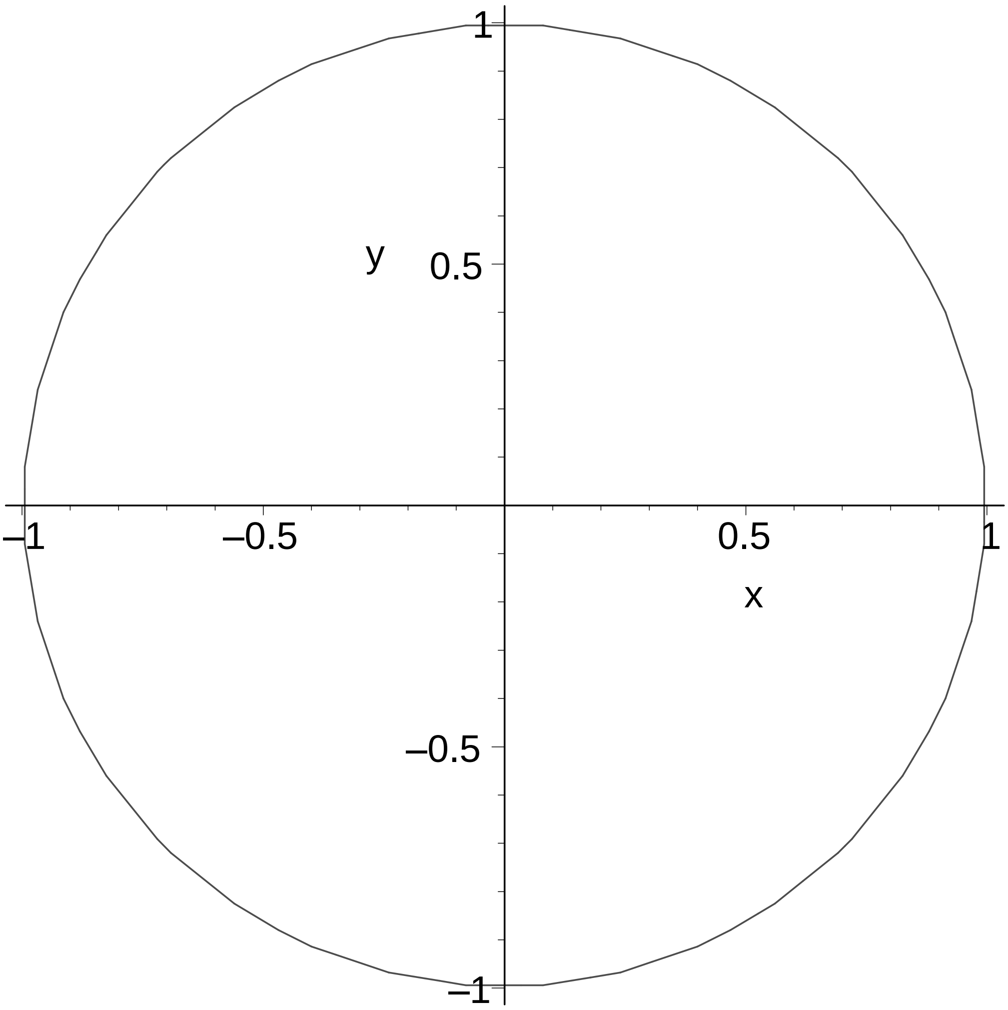
Solche Pfeildiagramme sind natürlich unhandlich, wenn die Mengen X und Y unendlich sind. Sind X und Y Zahlbereiche, können wir versuchen, die Menge der Punkte $(x, y) \in R$ in einem Koordinatensystem zu skizzieren.

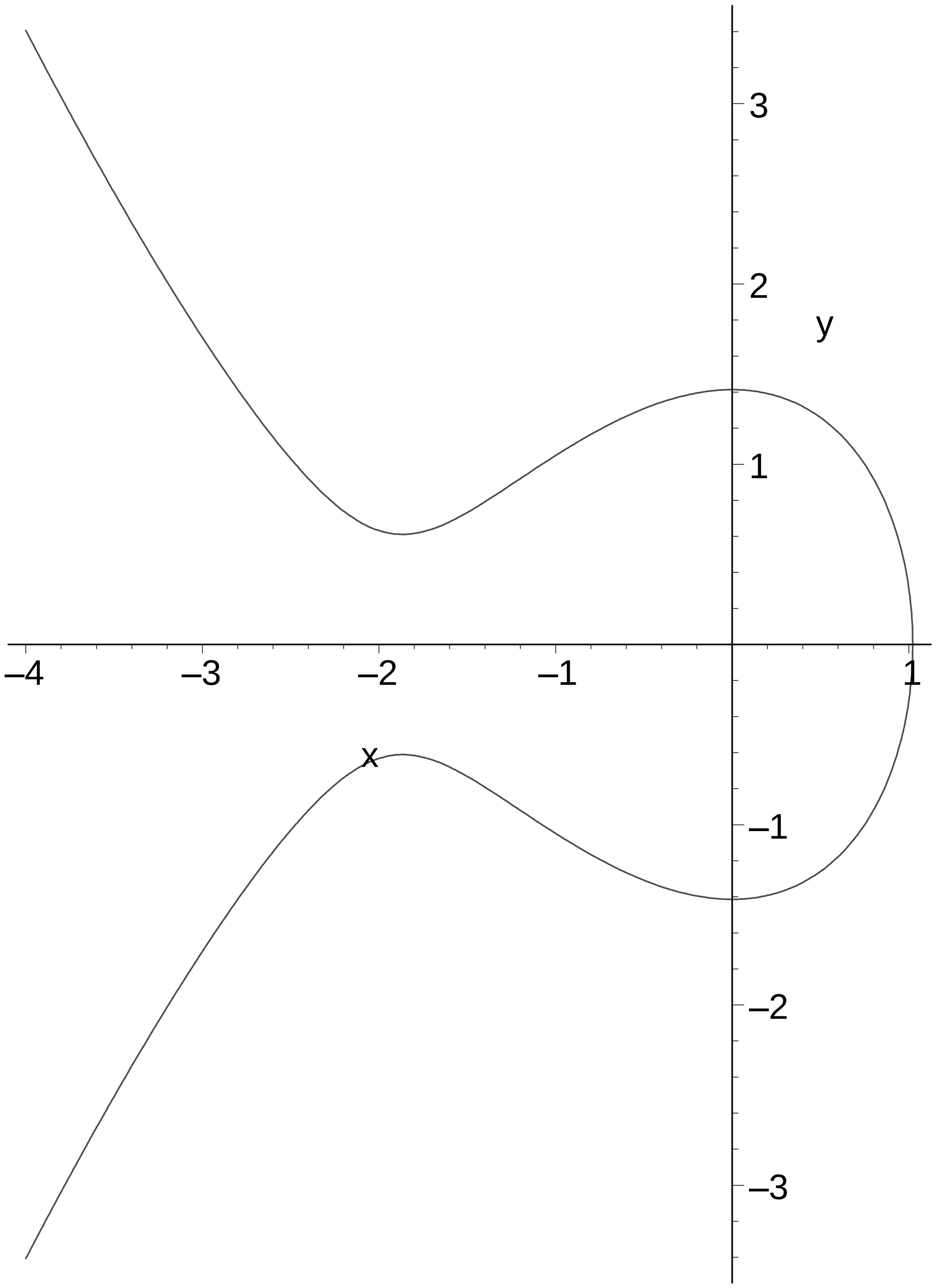
Beispiel 32. Die folgenden vier Skizzen illustrieren die folgenden vier Relationen auf $\mathbb{R}$:

- $R_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
- $R_2 = \{x, y) : x^3 + 2.8x^2 + 2y^2 = 4\}$
- $R_3 = \{x, y) : x^3 + 3x^2 + 2y^2 = 4\}$

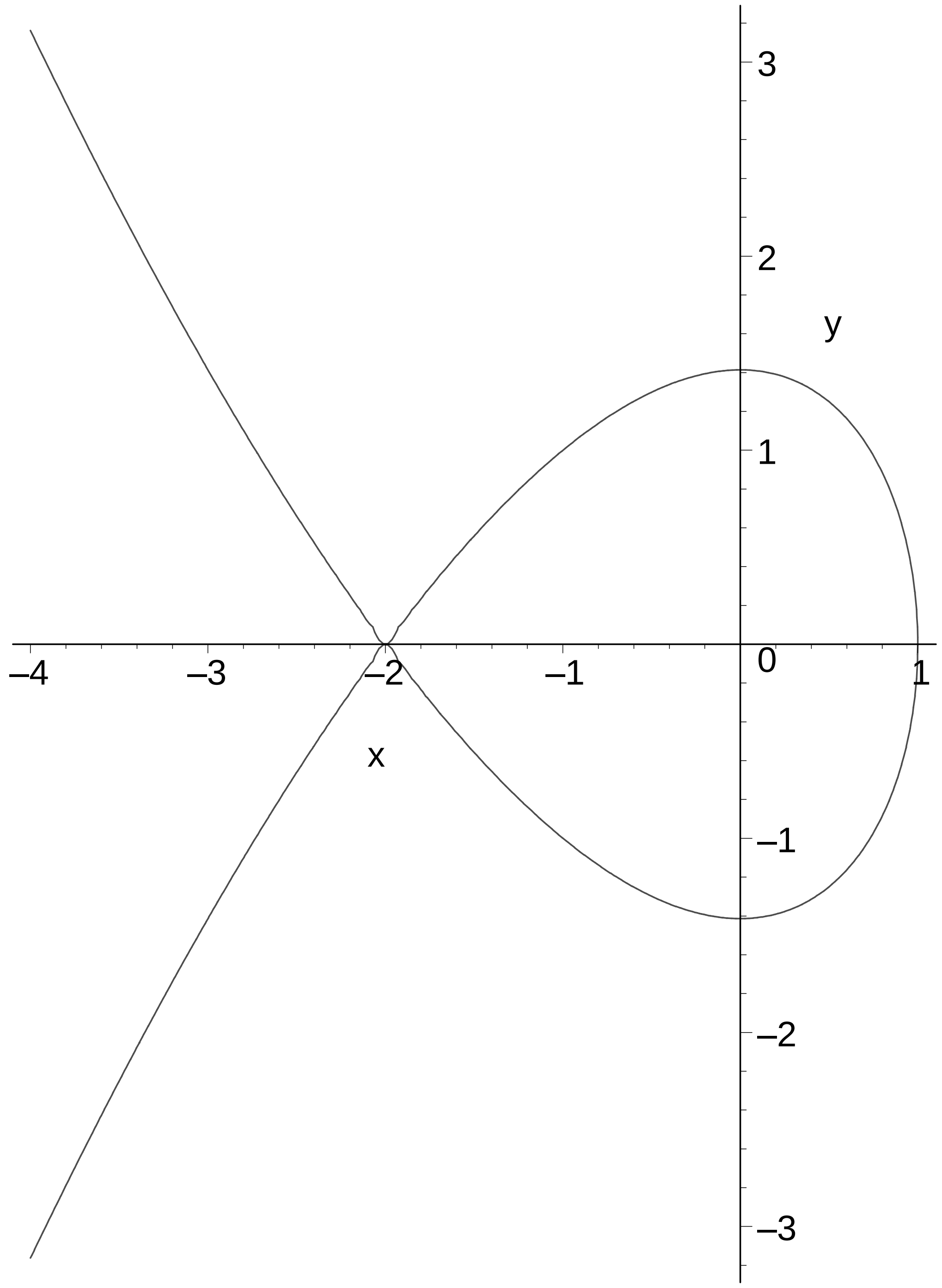
- $R_4 = \{x, y) : x^3 + 3.2x^2 + 2y^2 = 4\}$

Diese Beispiele sollen Ihnen bereits jetzt zeigen, was MathematikerInnen gerne machen, nämlich funktionale Zusammenhänge grafisch zu veranschaulichen. Machen Sie sich damit vertraut!

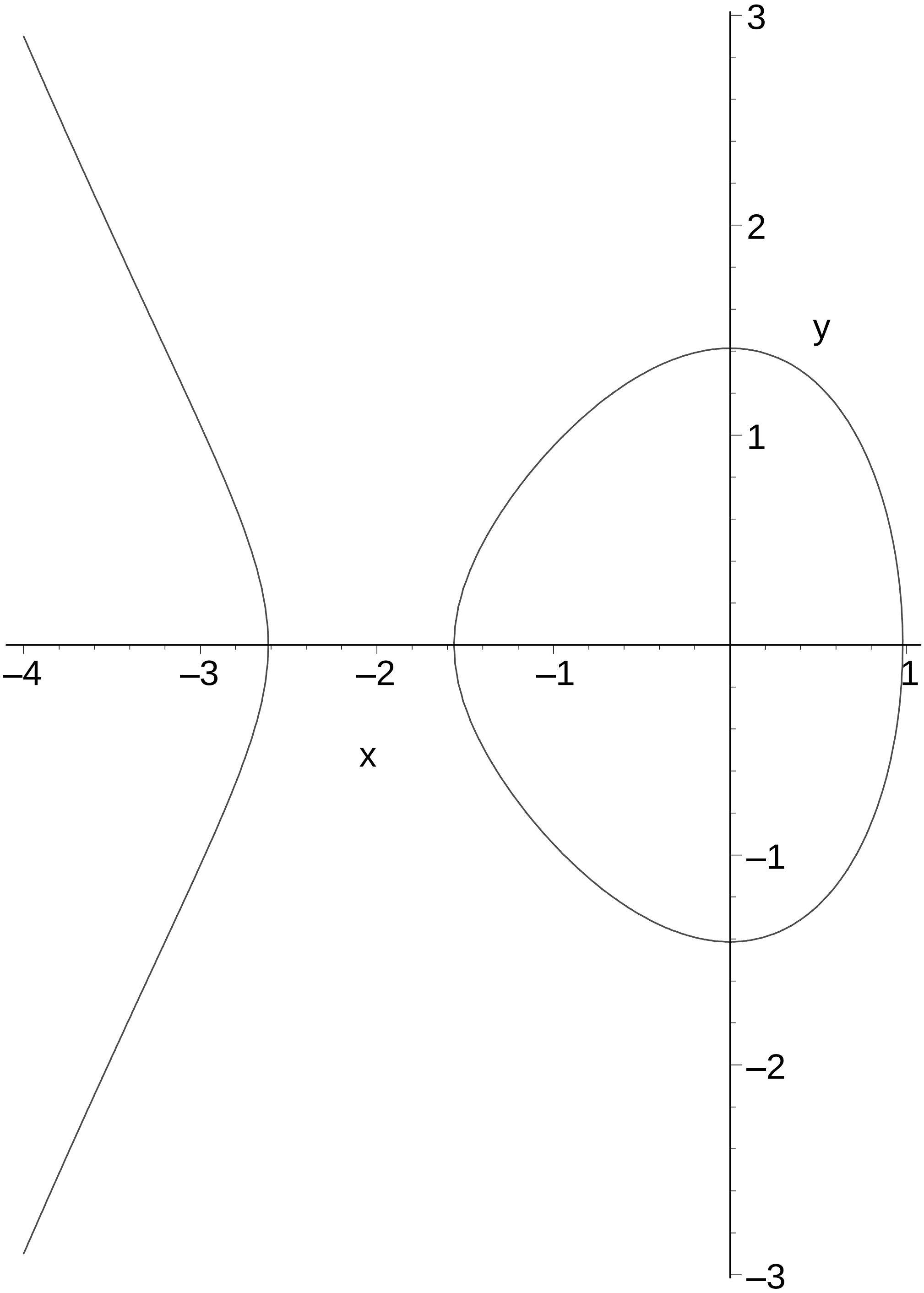

1
y
0.5
–1
–0.5
0.5
1
x
–0.5
–1



3
2
y
1
–4
–3
–2
–1
1
x
–1
–2
–3



3
2
y
1
–4
–3
–2
–1
0
1
x
–1
–2
–3



Wir wollen hier noch einige besondere Relationen R auf einer Menge X erwähnen, d.h. $R \subseteq X \times X$.

Die Relation $R \subseteq X \times X$ heißt reflexiv wenn $x \; R \; x$, also $(x, x) \in R$, für alle $x \in X$ gilt. Die Relation R heißt symmetrisch, wenn aus $x \; R \; y$ stets $y \; R \; x$ folgt. Ferner heißt R transitiv, wenn aus $x \; R \; y$ und $y \; R \; z$ folgt $x \; R \; z$. Eine Relation die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist heißt Äquivalenzrelation.

Der Begriff der Äquivalenzrelation ist für die gesamte Mathematik von zentraler Bedeutung. In dieser einführenden Veranstaltung kann darauf verzichtet werden. Wir geben hier nur ein kleines Beispiel an:

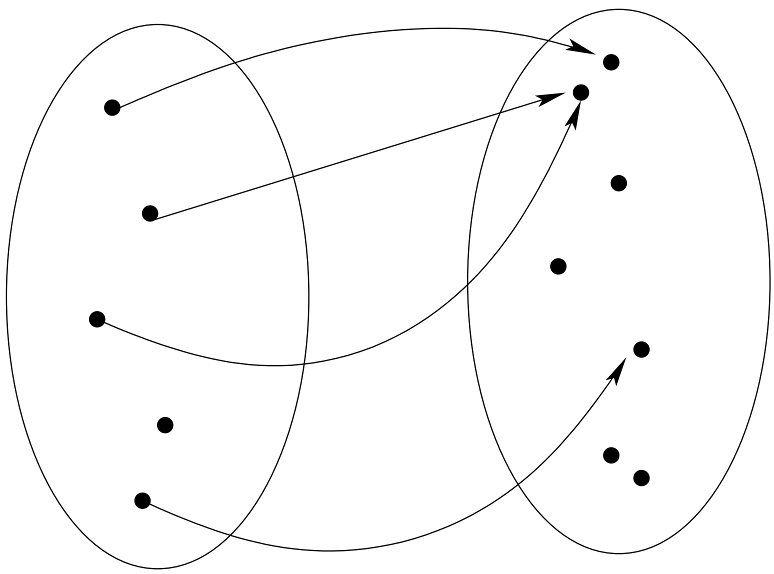
Beispiel 33. Sei X die Menge aller Menschen. Wir definieren auf X eine Relation durch x und y haben am selben Tag Geburtstag. Man kann sich schnell überlegen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Interessant ist, dass diese Relation eine Klasseneinteilung oder Partition von X liefert. **[Einschub:** Eine Partition von X ist eine Menge A_i von Teilmengen von X, die paarweise disjunkt sind und $\bigcup_i A_i = X$.**]** Die Klassen sind gerade die Mengen von Menschen, die am selben Tag xx.yy.zzzz geboren sind. Man kann sich leicht überlegen, dass **jede** Äquivalenzrelation auf einer Menge X eine solche Zerlegung der Menge X liefert.

Abbildungen

In den Wirtschaftswissenschaften haben wir es meistens mit Abbildungen zu tun.

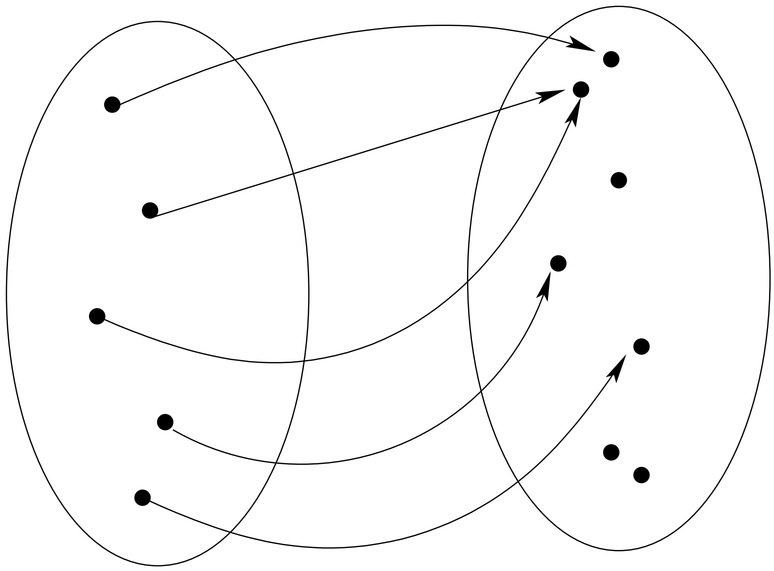
> Eine Abbildung aus X nach Y ist eine Relation zwischen X und Y, so dass es zu **jedem** $x \in X$ **höchstens ein** $y \in Y$ gibt so dass x und y in Relation zueinander stehen. Das Element y wird mit $f(x)$ bezeichnet.

In unserer Pfeildarstellung bedeutet dies, dass bei **jedem** Element $x \in X$ **höchstens ein** Pfeil beginnt:



Beachte, dass nicht jedem $x \in X$ ein Funktionswert zugeordnet werden muss. Im Buch von SCHWARZE gibt es eine subtile Unterscheidung: Wenn jedem $x \in X$ **höchstens** ein y zugeordnet wird, so spricht

SCHWARZE von einer Funktion aus X nach Y (so wie hier angegeben). Wird **jedem** $x \in X$ **genau ein** $f(x)$ zugeordnet, spricht SCHWARZE (und auch wir) von einer Abbildung von X nach Y:



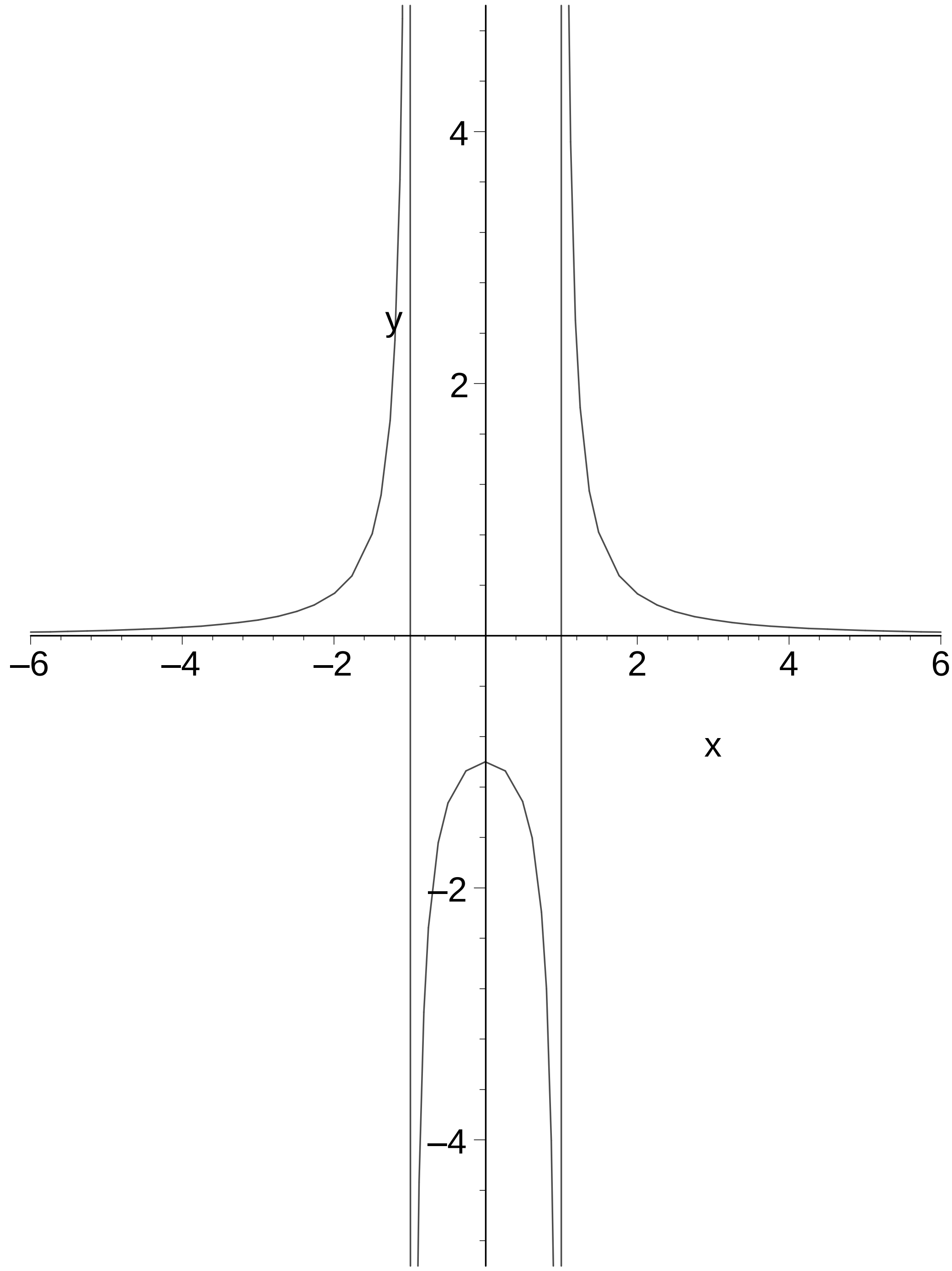
Das ist manchmal ganz praktisch, in der Mathematik aber eher ungewöhnlich. Es hat Vorteile, wenn man komplizierte Funktionen hat wie etwa

$$f(x) = \frac{x}{x^5 + 3x^3 - x - 4}$$

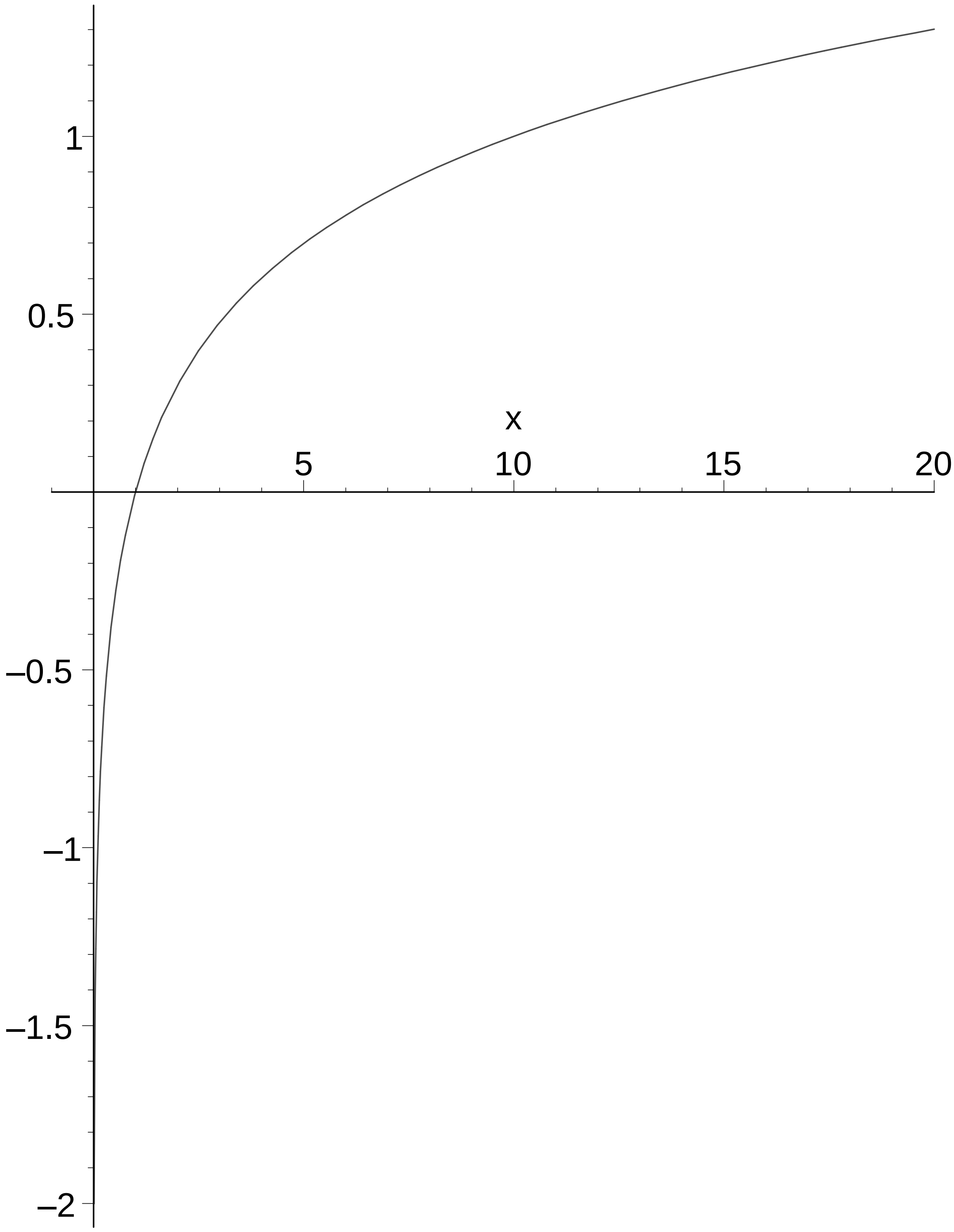
aufgefasst als Abbildung aus $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, wo man von vornherein gar nicht weiß, für welche x der Nenner 0 wird, die Funktion also gar nicht definiert ist.

Bezeichnung: $f : X \to Y$. Die Menge der $x \in X$, für die $f(x)$ erklärt ist, nennen wir den Definitionsbereich von f. Der Definitionsbereich muß nicht ganz X sein, wie die obigen Beispiele zeigen. Die Menge X heißt die Menge der unabhängigen Variablen, die Menge Y bezeichnet die abhängigen Variablen, denn wenn wir x kennen, kennen wir auch $f(x)$.

Beispiel 34. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Dieser Ausdruck ist natürlich nur erklärt, wenn $x^2 - 1 \neq 0$. In der Notation von SCHWARZE ist f eine Abbildung **aus** $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Die graphische Veranschaulichung:



Beispiel 35. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \lg x$ (dekadischer Logarithmus). Wir haben schon gesehen, dass der Logarithmus nur für positive Zahlen erklärt ist. Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{R}^+$:



Machen Sie sich bitte nicht zu viele Gedanken über die Frage, ob es Abbildungen von oder aus einer Menge X gibt. Wichtig ist nur, dass bei der Beschreibung einer Abbildung durch eine Vorschrift wie z.B. $\lg x$ oder $\frac{1}{x^2-1}$

zu beachten ist, dass diese Vorschrift für einige Werte von x nicht definiert ist. Oft liegt das daran, dass man nicht durch 0 dividieren darf. Andere Möglichkeiten: Logarithmen oder Wurzeln negativer Zahlen sind nicht definiert. Manche trigonometrische Funktionen haben Stellen, wo sie nicht definiert sind, z.B. $\tan(\pi/2)$ ist nicht definiert.

Abbildungen werden oft auch Funktionen genannt. Meistens spricht man von Funktionen, wenn die Mengen X und Y Zahlbereiche sind. Wenn wir hier von Zahlbereichen sprechen, meinen wir nicht etwa nur $\mathbb{R}$, sondern auch $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ usw. Denken Sie daran: Ökonomische Daten hängen fast nie nur von einer Variablen ab: Es würde unsere Bundesregierung freuen, wenn die Arbeitslosenquote eine Funktion in Abhängigkeit von nur einer Variablen wäre, z.B. dem Spitzensteuersatz. So einfach ist die Welt aber nicht, und deshalb müssen Sie sich mit Funktionen in mehreren Variablen beschäftigen!

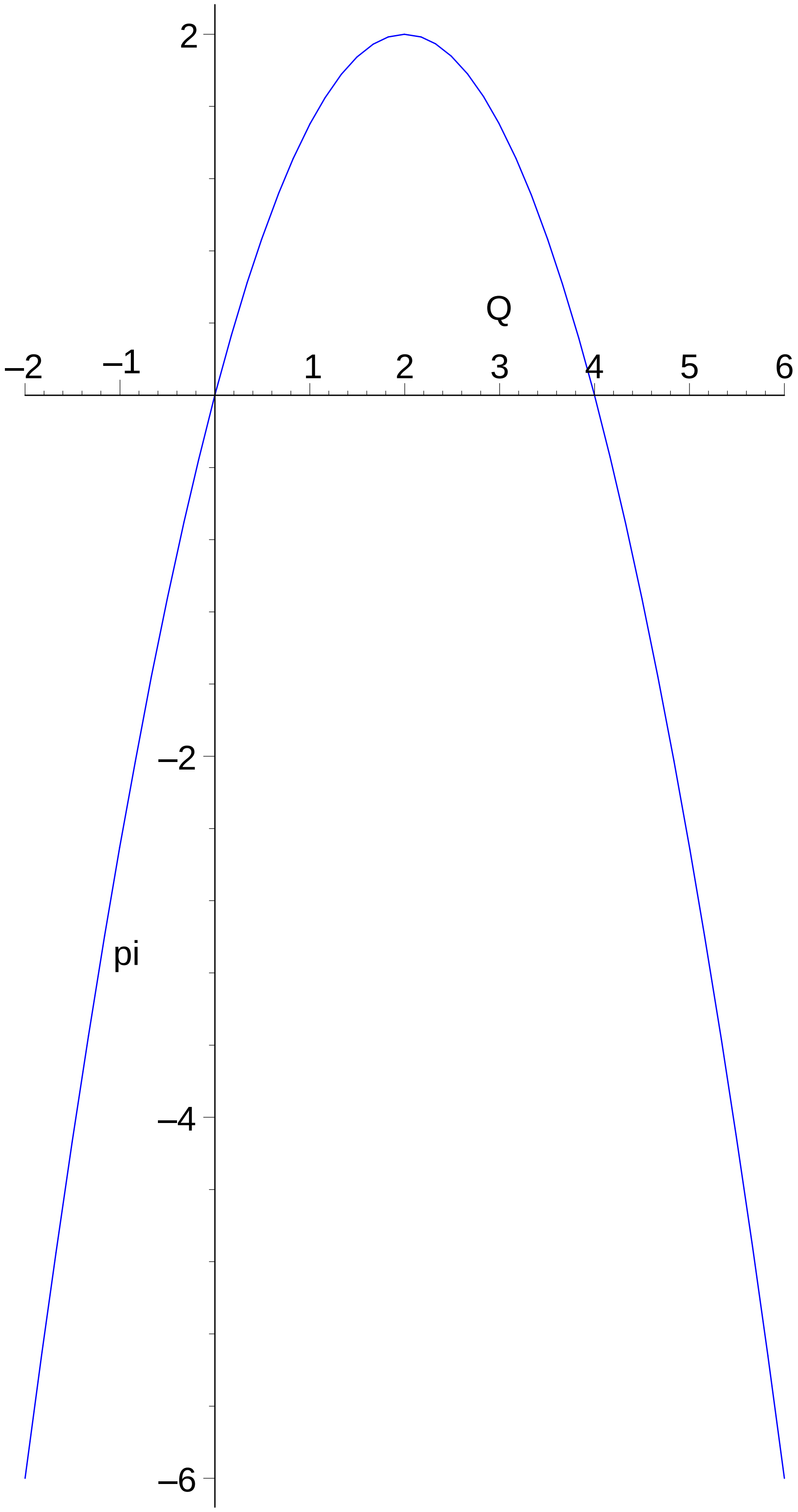
Ein anderes kleines Beispiel: Die (vor kurzem noch sehr beliebten) Aktiencharts sind nichts anderes als Funktionen von der Zeit in die Menge $\mathbb{R}$ möglicher Aktiennotierungen. Dieses Beispiel macht deutlich, dass zwischen den unabhängigen Variablen (hier der Zeit) und den abhängigen (dem Aktienkurs) **kein**

kausaler Zusammenhang bestehen muss. Ein kausaler Zusammenhang besteht vielleicht zwischen dem Zinsniveau und dem Aktienkurs, oder den Jahresabschlüssen der AG's und den Aktienkursen, aber sicher nicht zwischen der Zeit und dem Kurs!

Beispiel 36. Sie importieren Kakao von Ghana nach Deutschland. Sie sind Alleinimporteur. Bekanntlich sinkt der Preis ein wenig, wenn das Angebot steigt. Da Sie Monopolist sind, beeinflussen Sie selber den Preis, wenn Sie ein Überangebot schaffen. Der Zusammenhang zwischen Preis P und importierter Menge Q sei $P(Q) = \alpha_1 - \frac{1}{3}Q$. Der Kaufpreis in Ghana ist $K(Q) = \alpha_2 + \frac{1}{6}Q$. Ferner entstehen Verschiffungskosten S in Höhe von $S(Q) = \gamma Q$. Die Funktion, die den Profit π in Abhängigkeit von Q beschreibt, ist

$$\begin{aligned}\pi(Q) = (\alpha_1 - \frac{1}{3}Q)Q - (\alpha_2 + \frac{1}{6}Q)Q - \gamma Q \\ = (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)Q - \frac{1}{2}Q^2.\end{aligned}$$

Ist $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma \leq 0$, so ist $\pi(Q) \leq 0$ für alle Q, also lohnt es sich nicht, irgendetwas zu importieren! Im Fall $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma > 0$ sieht die Funktion $\pi(Q)$ etwa so aus:

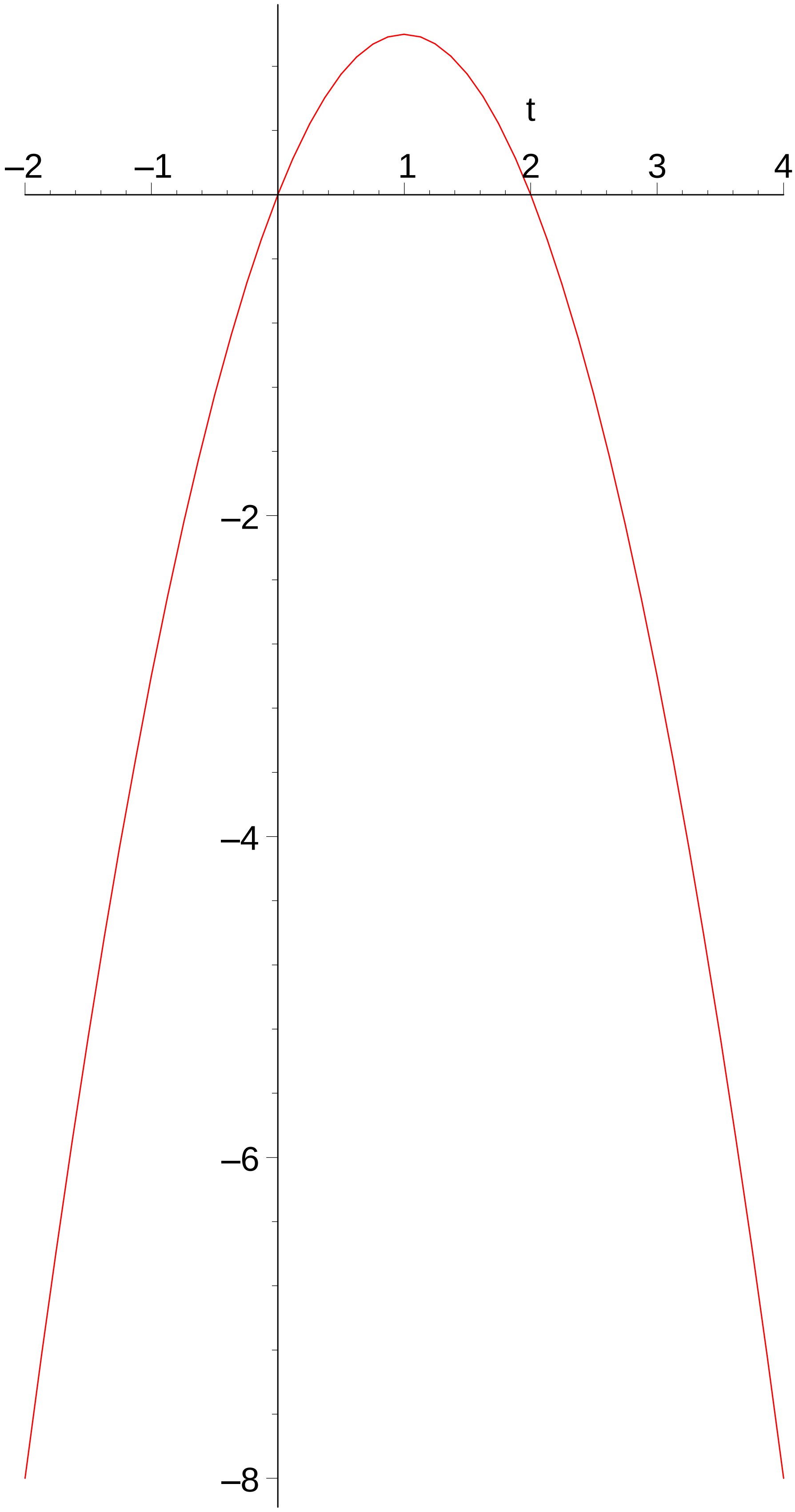

2
Q
–2
–1
1
2
3
4
5
6
–2
pi
–4
–6

In diesem Beispiel ist $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma = 2$. Der Buckel oberhalb der x-Achse wird schmaler und niedriger, wenn $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma$ kleiner wird! Sie können in unserer Skizze sofort sehen, für welchen Wert von Q der Profit maximal wird ($Q = 2$). Im allgemeinen ist der Profit maximal für $Q_{\max} = \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma$. Das sollte aus der Schule bekannt sein, sonst gedulden Sie sich noch ein wenig, bis wir es wiederholen!

Was passiert nun, wenn Ghana eine Exportsteuer t erhebt, d.h. für den Export der Kakaomenge Q enstehen Ihnen Zusatzkosten $T(q) = tQ$. Dann ist die Profitfunktion

$$\pi_{\mathsf{tax}}(Q) = (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - t)Q - \frac{1}{2}Q^2$$

mit einem Maximum für $Q^t_{\max} = \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - t$. Also: Sie haben ein geringeres Interesse, Kakao auszuführen, als ohne Steuern. Wie sieht es nun aus Sicht Ghanas aus: Die Regierung will natürlich ihr Steueraufkommen maximieren. Wie hoch ist aber das Steueraufkommen? Sie kaufen jetzt nur noch $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - t$ Kakao. Die Regierung erhält Steuern in Höhe von. $R(t) = (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma - t)t$. Auch diesen Zusammenhang können wir wieder verdeutlichen:


t
–2
–1
1
2
3
4
–2
–4
–6
–8

Ghana maximiert sein Steuereinkommen aus der Exportsteuer für $t = 1$, allgemein $t = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma)$.

Es sei bemerkt, dass wir hier die Funktionen auch für Werte skizziert haben, die ökonomisch sinnlos sind (negative Steuer, negativer Export, Verlust aus Steuereinnahmen).

Wir werden im nächsten Kapitel auf einige Funktionen, die aus der Schule bekannt sein sollten, genauer eingehen.

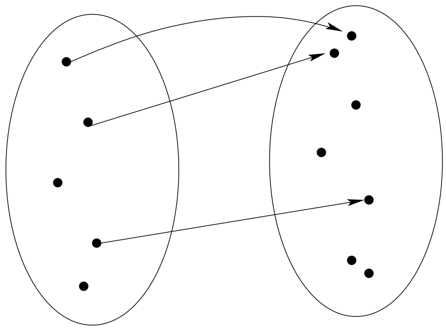
Bevor wir dies tun, führen wir noch drei wichtige Begriffe für Abbildungen ein: injektiv, surjektiv, bijektiv!

> Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt. Die Abbildung heißt surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ (mindestens) ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Die Abbildung heißt bijektiv, wenn sie injektiv **und** surjektiv ist **und** es zu jedem $x \in X$ ein y gibt mit $f(x) = y$.

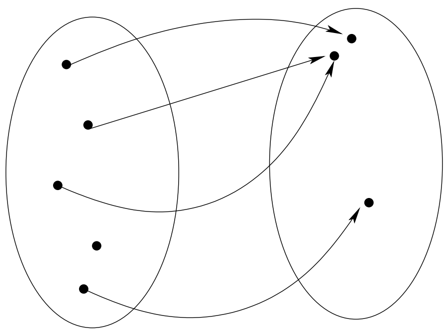
Für unsere Pfeildarstellung von Abbildungen bedeutet das folgendes:

injektiv: in jedem $y \in Y$ endet höchstens ein Pfeil
surjektiv: in jedem $y \in Y$ endet mindestens ein Pfeil
bijektiv: in jedem $y \in Y$ endet genau ein Pfeil
und in jedem $x \in X$ beginnt genau ein Pfeil.

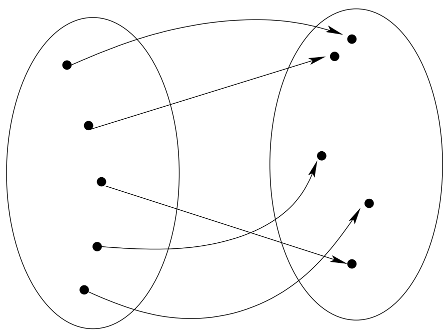
Die folgenden Bilder machen dies noch einmal deutlich:



injektiv



surjektiv



bijektiv

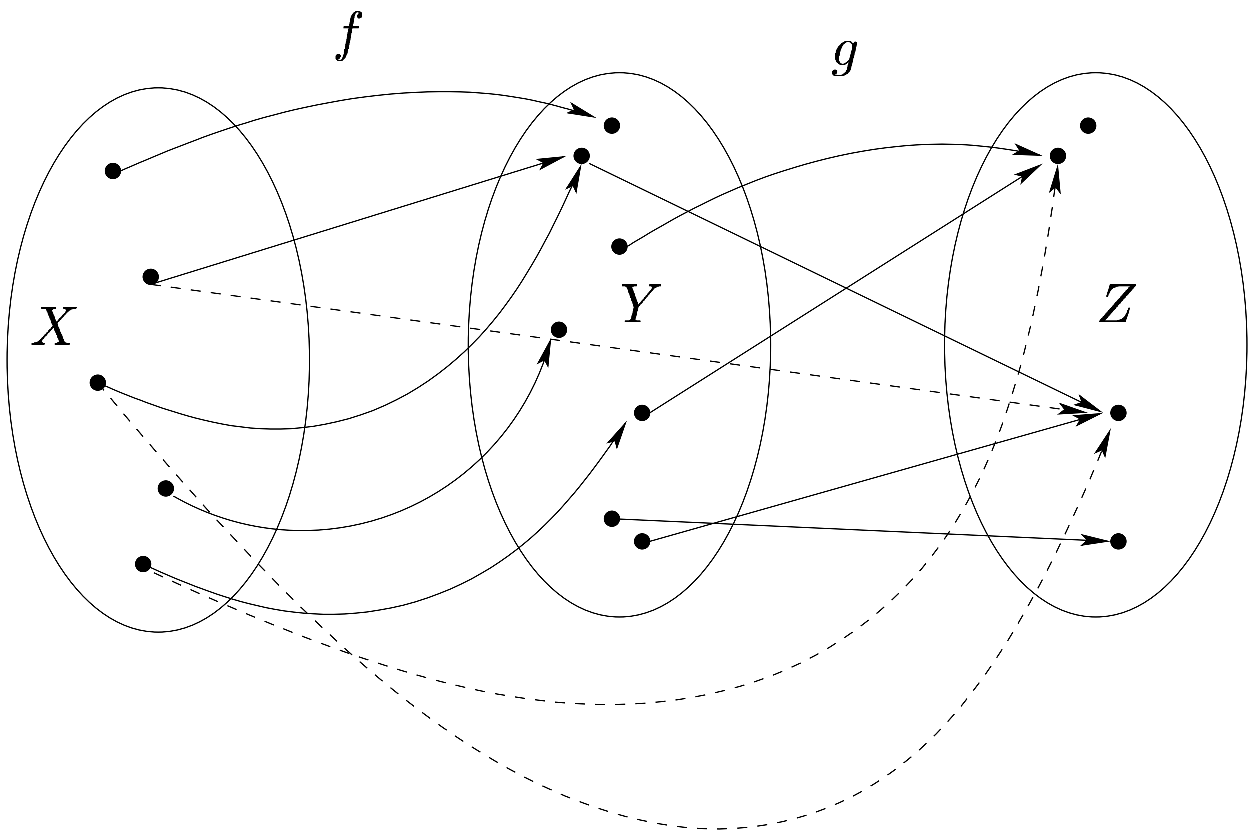
In allen drei Fällen haben wir Abbildungen, weil aus den linken Mengen an jedem Punkt nur höchstens ein Pfeil beginnt. Wir machen noch einmal auf die eher ungewöhnliche Konvention aufmerksam, dass wir auch dann von Abbildungen reden, wenn in einem Punkt von X gar kein Pfeil beginnt, es also Elemente $x \in X$ gibt, für die $f(x)$ gar nicht definiert ist.

Ist f eine injektive Abbildung, so definieren wir $f^{-1} : Y \to X$ durch folgende Vorschrift: $f^{-1}(y) = x$, wobei $x \in X$ durch die Eigenschaft $f(x) = y$ bestimmt ist. Beachte, dass x wegen der Injektivität eindeutig bestimmt ist. In unseren Pfeilbildern bedeutet dies einfach, dass wir jeden Pfeil umdrehen. Die Abbildung f^{-1} heisst die zu f inverse Abbildung.

Beachte, dass auch f^{-1} injektiv ist. Ferner ist f bijektiv genau dann wenn f injektiv und surjektiv ist und zusätzlich f^{-1} auch surjektiv ist.

Bei einer bijektiven Abbildung geht von jedem Punkt in X genau ein Pfeil aus und in jedem Punkt aus Y endet genau ein Pfeil. Das hei ss t insbesondere, dass X und Y gleich viele Elemente haben.

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Wir definieren die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ wie folgt: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Also: Wir wenden erst f auf x an, dann auf den Wert $f(x)$ die Abbildung g.



$$g \circ f$$

Wichtig ist es, sich zu merken, dass $g \circ f$ bedeutet, erst f und dann g anzuwenden.