

## Kapitel 2. Funktionen einer Variablen

### 2.1 Einführende Beispiele

**Kostenfunktion und Stückkostenfunktion:** Das Unternehmen Miel produziert hochwertige Waschmaschinen. Es hat monatliche Fixkosten von 170.000 €. Die sind unabhängig von der produzierten Menge. Pro produziertem Stück fallen variable Kosten (vor allem Material und Löhne) von 500 € an. Die monatlichen Gesamtkosten des Unternehmens (in €) betragen dann

$$K(x) = 170.000 + 500x,$$

wobei  $x$  die Anzahl der im Monat produzierten Waschmaschinen ist. Bei 100 Waschmaschinen fallen also Gesamtkosten an in Höhe von

$$K(100) = 230.000,$$

bei 1000 Stück

$$K(1000) = 670.000.$$

$K$  heißt die **Kostenfunktion**. Wenn man nicht an den Gesamtkosten  $K$  interessiert ist, sondern an den

Kosten pro produziertem Stück, so erhält man die **Stückkostenfunktion**  $S(x)$ . Sie ergibt sich aus der Kostenfunktion  $K(x)$  einfach durch

$$S(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

In obigem Beispiel ist

$$S(x) = \frac{170.000 + 500x}{x} = 500 + \frac{170000}{x}.$$

Bei 100 produzierten Waschmaschinen ist das also

$$S(100) = 2300,$$

bei 1000 Maschinen

$$S(1000) = 670.$$

Weitere ökonomische Funktionen sind

**Nachfrage-Funktion (Preis-Absatz-Funktion):** Sei  $p$  der Preis eines Gutes,  $N$  die nachgefragte (abgesetzte) Menge. Die Nachfragefunktion ist dann  $N(p)$ .

Üblicherweise wird  $N(p)$  kleiner, wenn der Preis  $p$  steigt. So könnte z.B. ( $p$  ausgedrückt in €)

$$N(p) = 100.000 - 500p \quad (7)$$

sein. Das heißt, bei einem Preis von 10 € beträgt die Nachfrage 95.000 Stück, bei einem Preis von 13 € nur 93.500 Stück.

Oft wird auch umgekehrt die Funktion  $p(N)$  betrachtet.

**Angebots-Funktion:** Sei  $p$  der Preis eines Gutes,  $A$  die vom Produzenten auf den Markt gebrachte Menge. Die Angebotsfunktion ist dann  $A(p)$ .

**Erlösfunktion:** Für  $N$  abgesetzte Güter zum Stückpreis  $p(N)$  ist der Erlös in Abhängigkeit von der Menge  $N$

$$E(N) = N \cdot p(N)$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass der Preis  $p$  von der Nachfrage  $N$  abhängt, typischerweise mit hoher Nachfrage steigt.

In Abhängigkeit vom Preis  $p$  ist die Erlösfunktion

$$E(p) = N(p) \cdot p.$$

Wenn wir die Nachfragefunktion (7) benutzen, erhalten wir

$$E(p) = 100.000p - 500p^2.$$

Eine typische Frage ist: Für welchen Preis  $p$  wird der Erlös  $E(p)$  maximal. Solche und ähnliche Fragen werden wir mit etwas mathematischer Theorie beantworten können.

## 2.2 Begriffe und Bezeichnungen

Eine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } D(f) \subseteq \mathbb{R}$$

heißt **reellwertige Funktion einer reellen Variablen (Veränderlichen)**. Wie bereits früher definiert, ist  $D(f)$  der **Definitionsbereich** von  $f$ . Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, was die Funktion  $f$  ist, schreiben wir auch einfach  $D$  statt  $D(f)$ . Die Menge

$$W(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

heißt der **Wertebereich** von  $f$ . Wir nennen  $x \mapsto f(x)$  die **Zuordnungsvorschrift** und

$$G_f = \{(x, y) \in D(f) \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

den **Graph** von  $f$ .

Viele Zuordnungsvorschriften haben einen “natürlichen maximalen Definitionsbereich”. Oft wird dann nur die Zuordnungsvorschrift angegeben, und es ist dann die zugehörige Funktion auf dem maximalen Definitionsbereich gemeint.

**Beispiel 1.** •  $x \mapsto x^2$  hat den maximalen Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ .

•  $x \mapsto \frac{1}{x}$  hat den maximalen Definitionsbereich  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

• Die schon vorher betrachtete Kostenfunktion

$$K(x) = 170.000 + 500x$$

hat als Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ . In dem betrachteten Beispiel sind allerdings nur nicht-negative ganze Zahlen  $x$  interessant ( $x$ : Anzahl der Waschmaschinen) und nur bis zu einer gewissen Höhe, die durch die Maximalauslastung des Unternehmens gegeben ist. Dieses Beispiel zeigt, dass nicht alle Werte für  $x$ , die mathematisch sinnvoll sind, auch im ökonomischen Sinn sinnvoll sind.

Ein Hilfsmittel zur Veranschaulichung einer Funktion  $f$  und ihres Graphen ist eine [Wertetabelle](#), in der ausgewählte Werte von  $x$  zusammen mit ihrem Funktionswert  $f(x)$  eingetragen werden.

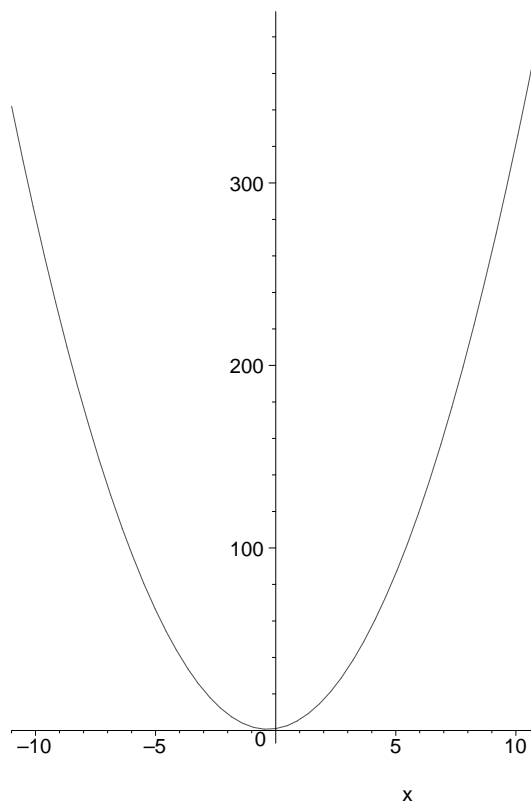
**Beispiel 2.** Wir setzen unser Beispiel  $K(x) = 170.000 + 500x$  fort:

$x$	1	10	20	50	100	1000
$K(x)$	170.000	175.000	180.000	195.000	220.000	670.000

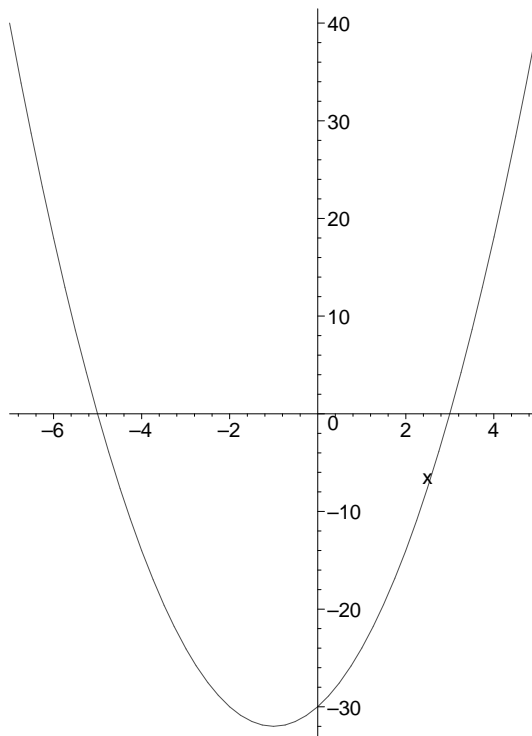
**Beispiel 3.**  $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$x$	-2	-1	0	1	2	5	10
$f(x)$	9	2	1	6	17	86	321

Eine genauere Methode ist das Zeichnen der Graphen in ein Koordinatensystem. Der Graph zur oben angegebenen Funktion  $3x^2 + 2x + 1$  ist

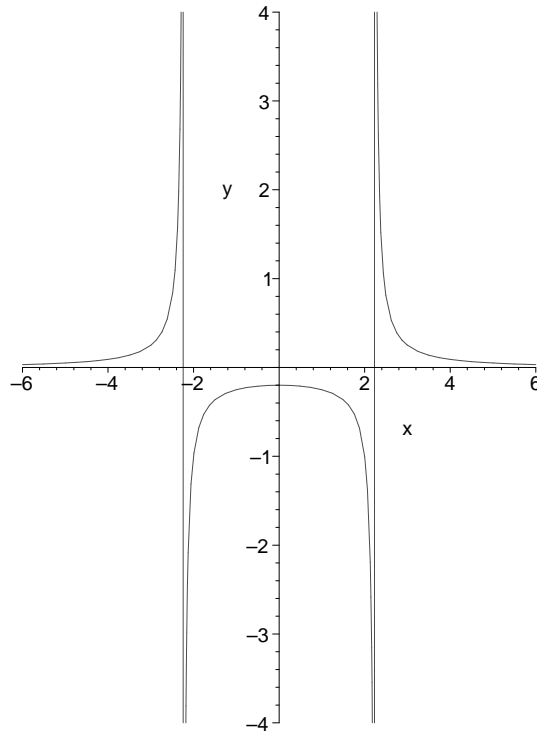


**Beispiel 4.**  $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$



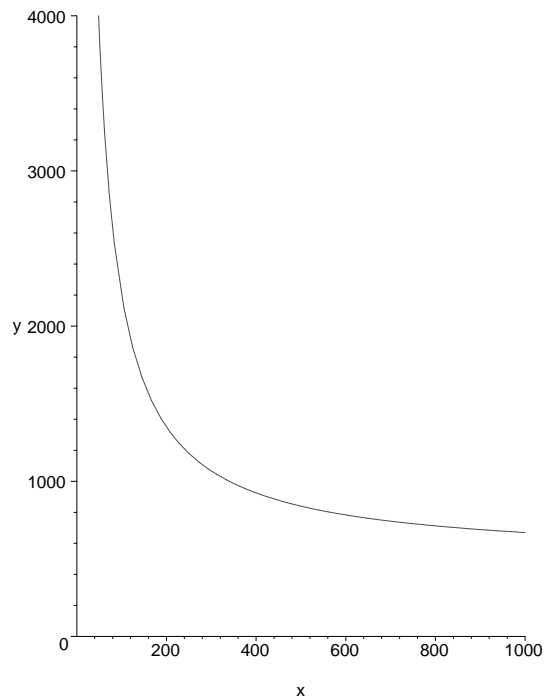
Diese Funktion ist weder injektiv noch surjektiv.

**Beispiel 5.**  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5}$



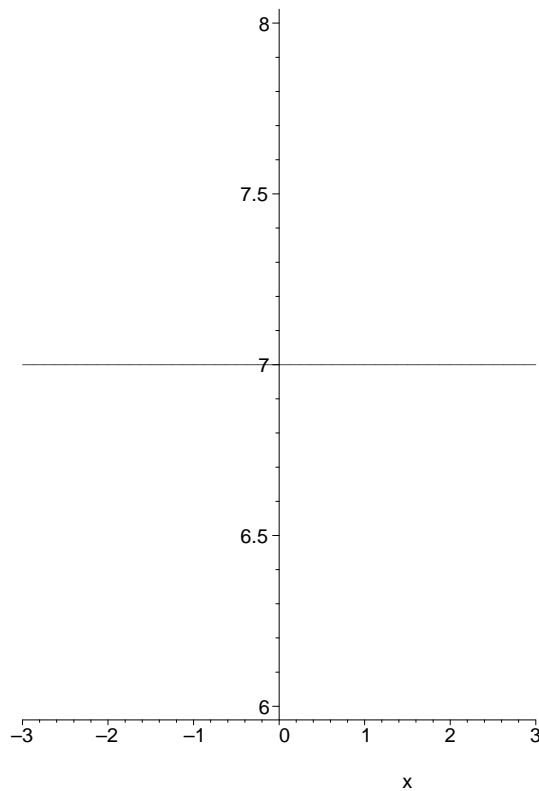
Auch diese Funktion ist weder injektiv noch surjektiv, denn  $f(x)$  ist niemals 0.

**Beispiel 6.**  $S(x) = 500 + \frac{170.000}{x}$



Diese Funktion ist injektiv und nimmt alle positiven Werte  $> 500$  an. Wenn wir  $S$  also auffassen als eine Abbildung  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x > 500\}$ , so ist  $S$  surjektiv (sogar bijektiv!).

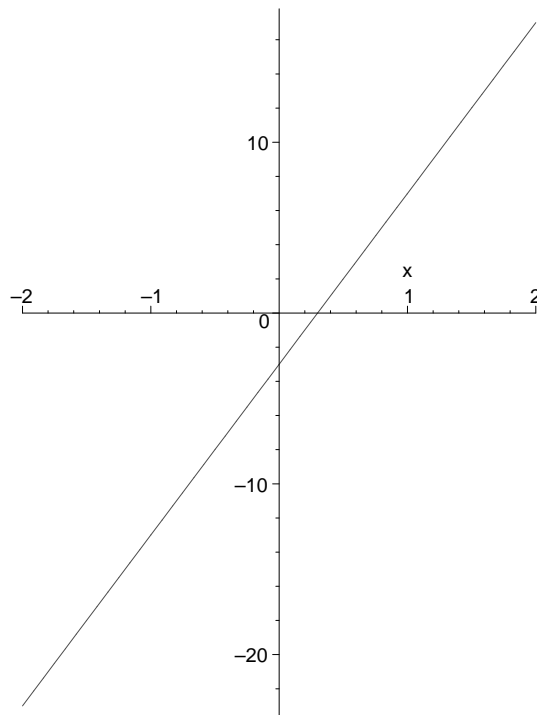
## Beispiel 7. $f(x) = 7$



Diese Funktion heißt **konstant**

Allgemein heißt eine Funktion mit der Vorschrift  $f(x) = c$ , wobei  $c$  eine Zahl unabhängig von  $x$  ist, **konstant**. Konstante Funktionen sind nicht injektiv und nicht surjektiv.

**Beispiel 8.**  $f(x) = 10x - 3$



Die Abbildung  $f$  ist injektiv und surjektiv.

Eine Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot x + b$$

heißt **linear**. Dabei sind  $a$  und  $b$  feste reelle Zahlen. Die Kostenfunktion  $K(x) = 170.000 + 500x$  ist beispielsweise eine lineare Funktion.

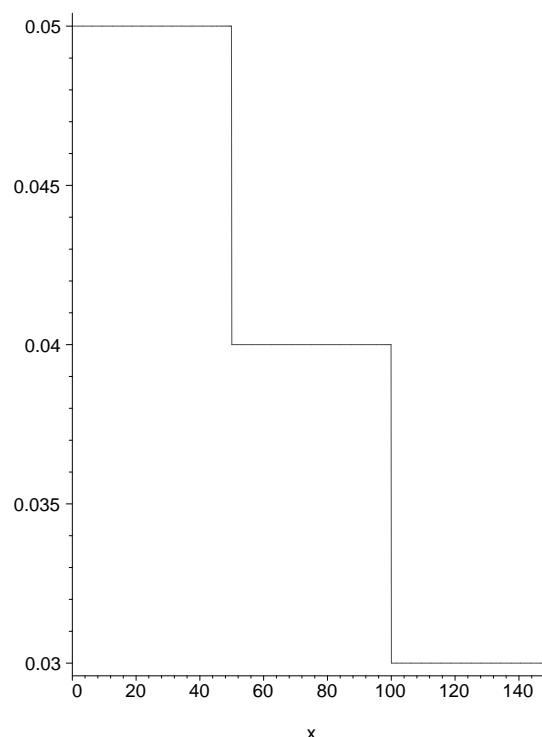
**Beispiel 9.** Ein Kopierladen erhebt die Kosten pro Fotokopie in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der getätigten Kopien. Hierbei gelten folgende Preise:

Anzahl der Kopien	0 bis 49	50 - 99	ab 100
Preis pro Kopie	0,05€	0,04€	0.03€

Die Funktion  $k$ , die den Preis pro Kopie beschreibt, ist also gegeben durch

$$k(x) = \begin{cases} 0,05 & \text{falls } 0 \leq x \leq 49 \\ 0,04 & \text{falls } 50 \leq x \leq 99 \\ 0,03 & \text{falls } 100 \leq x \end{cases}$$

Ihr Graph sieht wie folgt aus:

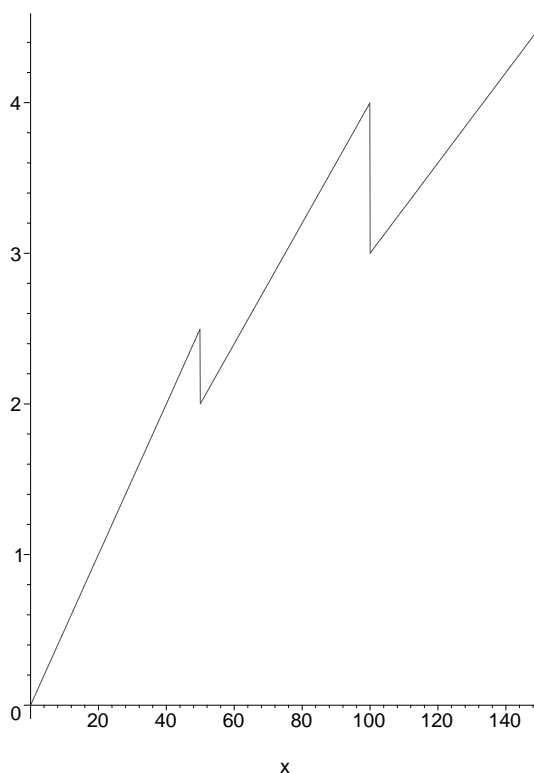


Eine solche Funktion nennt man **Treppenfunktion**.  
Treppenfunktionen sind weder injektiv noch surjektiv.

Die Funktion  $K$ , die die Gesamtkosten des Kunden in Abhängigkeit von der Stückzahl angibt, ist

$$K(x) = \begin{cases} 0,05x & \text{falls } 0 \leq x \leq 49 \\ 0,04x & \text{falls } 50 \leq x \leq 99 \\ 0,03x & \text{falls } 100 \leq x \end{cases}$$

Ihr Graph sieht wie folgt aus:



Solche Funktionen treten immer bei Preisen mit Rabattstaffelung auf oder etwa auch bei den Portokosten für Briefe in Abhängigkeit vom Gewicht.

Injektive Abbildungen haben eine schöne Eigenschaft:

Ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv, hat den Definitionsbereich  $D$  und den Wertebereich  $W$ , so ist  $f : D \rightarrow W$  **bijektiv**. Dann heißt

$$f^{-1} : W \rightarrow D, y \mapsto x \text{ wobei } x \in D \text{ mit } f(x) = y$$

die **Umkehrfunktion** zu  $f$ . Der Graph

$$\begin{aligned} G_{f^{-1}} &= \{(y, x) \in W \times D \mid y = f(x)\} \\ &= \{(y, x) \in W \times D \mid (x, y) \in G_f\} \end{aligned}$$

entsteht aus  $G_f$  durch **Spiegelung** an der Winkelhalbierenden.

**Beispiel 10.** Wir betrachten wieder die Stückkostenfunktion

$$S(x) = 500 + \frac{170.000}{x}.$$

Für welche Stückzahl ergibt sich 1500 €? Wir lösen hierzu

$$500 + \frac{170.000}{x} = 1500$$

nach  $x$  auf und erhalten

$$\frac{170.000}{x} = 1000$$

$$x = 170.$$

Das ist die gesuchte Stückzahl, denn es ist nun  $S(170) = 1500$ . Lösen wir allgemein die Gleichung

$$500 + \frac{170.000}{x} = y$$

nach  $x$  auf, so erhalten wir

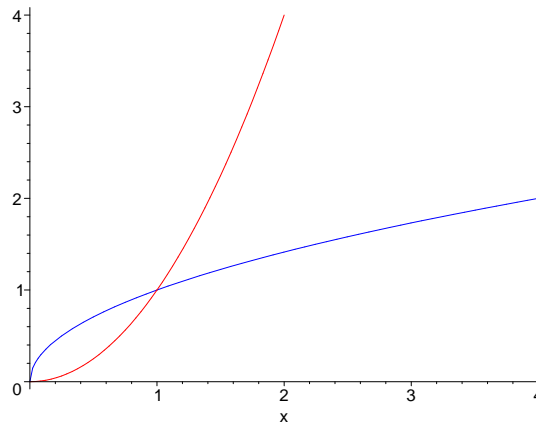
$$x = \frac{170.000}{y - 500}$$

und dies ist gerade die Umkehrfunktion, also

$$S^{-1}(y) = \frac{170.000}{y - 500}.$$

Mit ihr lässt sich zu beliebigen Stückkosten die zugehörige Stückzahl ermitteln.

**Beispiel 11.** Die Funktion  $F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $f(x) = x^2$  ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung ist  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ .



Beachte: Die Funktion  $f(x) = x^2$  kann auch für alle  $x \in \mathbb{R}$  betrachtet werden, ist dann aber nicht injektiv, folglich gibt es dann auch keine Umkehrfunktion.

## Verknüpfung von Funktionen

Aus gegebenen Funktionen können durch Verknüpfung mittels der Grundrechenarten neue Funktionen gebildet werden.

Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
Dann lassen sich auch die folgenden Funktionen definieren:

$$\lambda f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$f \pm g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),$$

$$f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Die Definitionsbereiche sind

$$D(\lambda f) = D(f)$$

$$D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$$

$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathbb{R} : x \in D(f) \cap D(g) \text{ und } g(x) \neq 0\}.$$

**Beispiel 12.** Seien  $f(x) = 15x - 3$ ,  $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ .  
Dann sind

$$(5f)(x) = 75x - 15$$

$$(f + g)(x) = 2x^2 + 12x - 2$$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= (15x - 3)(2x^2 - 3x + 1) = \\ &= 30x^3 - 51x^2 + 24x - 3\end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{15x - 3}{2x^2 - 3x + 1}$$

Aus dem Definitionsbereich von  $\frac{f}{g}$  müssen 1 und  $1/2$  ausgeschlossen werden, weil  $g(1) = 0$  und  $g(1/2) = 0$ .

## Intervalle

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann unterscheiden wir die folgenden Typen von Intervallen

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall,

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall,

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$   
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  halboffene Intervalle.

## Intervalle der Form

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

werden **uneigentliche** Intervalle genannt, die ersten beiden sind abgeschlossene, die letzten beiden offene Intervalle.

## Monotonie

Neben Injektivität und Surjektivität spielen weitere Eigenschaften von Funktionen eine wichtige Rolle. Besonders wichtig ist die Monotonie:

Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall im Definitionsbereich von  $f$ .

Gilt für alle  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (bzw. } f(x_1) < f(x_2)\text{)}$$

dann heißt  $f$  (streng) monoton wachsend in  $I$ .

Gilt für alle  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$

$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ (bzw. } f(x_1) > f(x_2)\text{)}$$

dann heißt  $f$  (streng) monoton fallend in  $I$ . Die Funktion  $f$  heißt (streng) monoton wachsend (fallend), wenn die Bedingung für  $I = D(f)$  erfüllt ist.

Die Stückkostenfunktion  $S(x) = 500 + \frac{170.000}{x}$  ist streng monoton fallend. Anschaulich bedeutet das: Je mehr Stücke produziert werden, so geringer sind die Stückkosten, um so effizienter ist also die Produktion.

Wir halten folgenden interessanten Zusammenhang zwischen Monotonie und Injektivität fest: Ist  $f$  streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend) dann ist  $f$  injektiv, hat also eine Umkehrfunktion.

**Beispiel 13.** Die Funktion  $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$  ist auf  $[0, \infty)$  streng monoton wachsend, auf  $(-\infty, -2]$

streng monoton fallend. Wo genau sich das Wachstumsverhalten umkehrt, ist am Graphen nicht genau zu erkennen. Das werden wir später mit mathematischen Methoden ermitteln können.

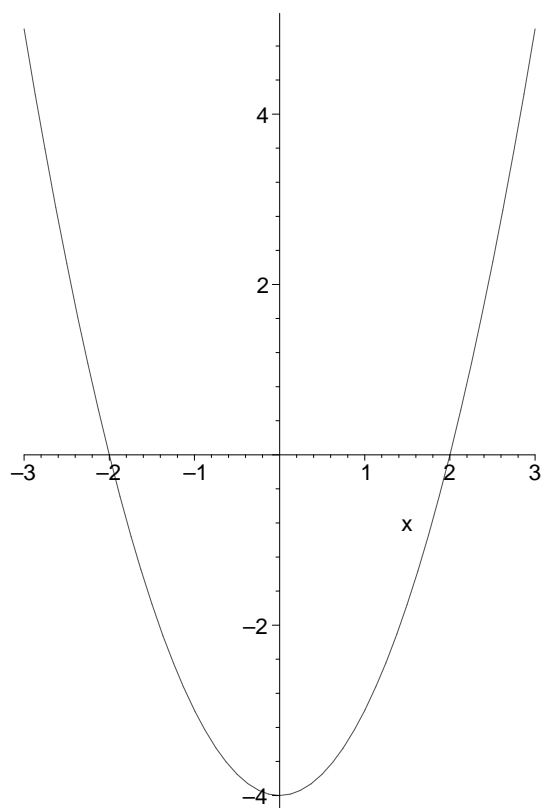
Können Funktionen nicht beliebig groß oder klein werden, spricht man von **beschränkten** Funktionen:

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $D$  der Definitionsbereich. Gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$f(x) \geq c \text{ (bzw. } f(x) \leq c) \text{ für alle } x \in D,$$

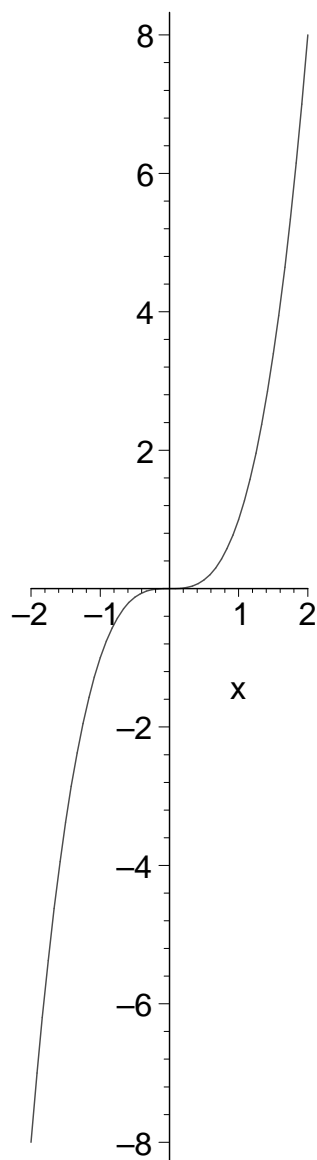
dann heißt  $f$  nach **unten** (bzw. oben) beschränkt. Ist  $f$  nach unten und nach oben beschränkt, dann heißt  $f$  **beschränkt**. Anders formuliert: Der Wertebereich  $W(f)$  ist beschränkt, also  $W(f) \subseteq [a, b]$  für geeignete  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel 14.** Die Funktion  $f(x) = x^2 - 4$  mit dem Graphen



ist nach unten beschränkt, weil  $f(x) \geq -4$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .  
Die Funktion ist aber nicht nach oben beschränkt.

**Beispiel 15.** Die Funktion  $f(x) = x^3$  ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.



Wir betrachten wieder die Kostenfunktion

$$K(x) = 170.000 + 500x$$

auf dem Intervall  $[0, 2000]$ . Dort ist  $K$  beschränkt, weil

$$K(x) \geq K(0) = 170.000$$

$$K(x) \leq K(2000) = 1.170.000$$

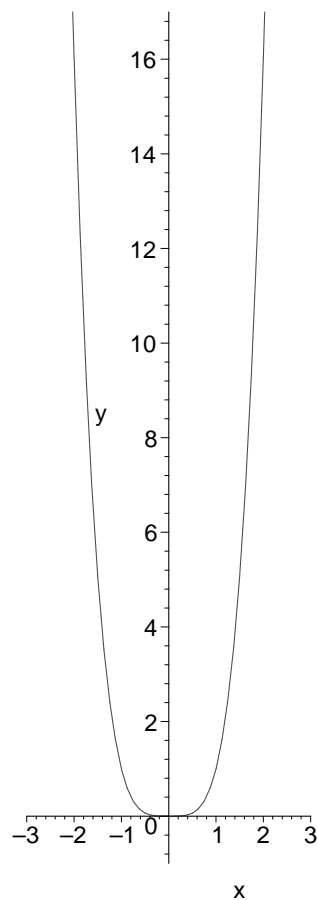
für alle  $x \in [0, 2000]$ . Das Intervall  $[0, 2000]$  könnte aus ökonomischer Sicht relevant sein, wenn etwa die Maximalauslastung bei 2000 produzierten Waschmaschinen liegt.

Folgende Eigenschaft beschreibt eine gewisse Symmetrie des Funktionsgraphen:

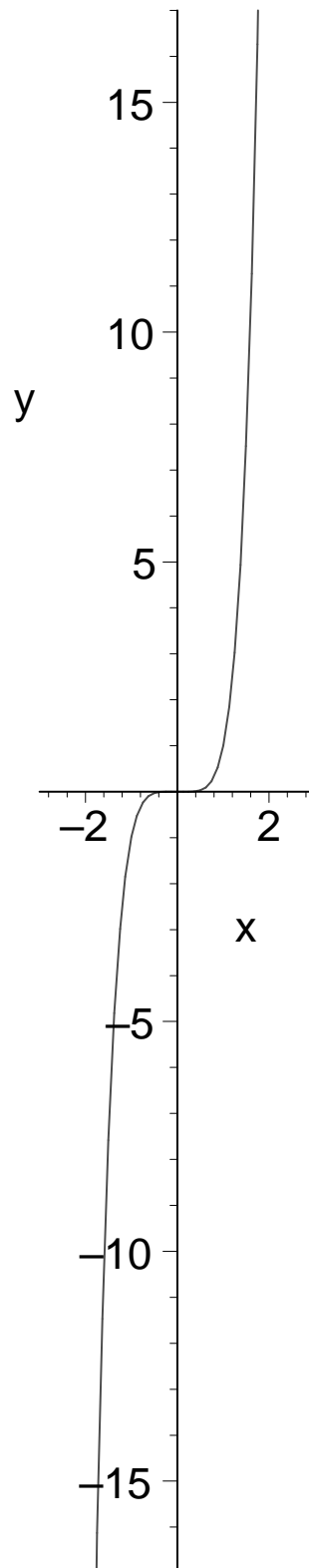
Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $D(f) = \mathbb{R}$ , die Funktion ist also auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Gilt  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dann heißt  $f$  **gerade**. Wenn  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, dann heißt  $f$  **ungerade**.

Der Graph einer geraden Funktion ist **achsensymmetrisch** zur  $y$ -Achse, der einer ungeraden Funktion ist **punktsymmetrisch** bezüglich des Ursprungs des Koordinatensystems.

**Beispiel 16.** Die Funktion  $f(x) = x^4$  ist gerade,



die Funktion  $f(x) = x^5$  ist ungerade:



## Nullstellen

Häufig interessiert man sich für die Werte der unabhängigen Variable einer Funktion, für die der Funktionswert 0 ist:

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ist  $x_0 \in D(f)$  eine reelle Zahl mit  $f(x_0) = 0$ , dann heißt  $x_0$  eine Nullstelle von  $f$ .

Die Lösungen einer Gleichung  $f(x) = g(x)$  sind genau die Nullstellen der Funktion  $F(x) = f(x) - g(x)$ .