Kapitel 3. Folgen und Reihen

3.1 Folgen

Eine Folge ist eine durchnummerierte Zusammenfassung von reellen Zahlen. Sie wird geschrieben als

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Es ist also $a_n \in \mathbb{R}$. Der Index n gibt an, an welcher Stelle in der Folge die Zahl a_n steht.

Beispiel 1.

1. Mit $a_n = n^2$ ist $a = (a_n) = (1, 4, 9, 16, \ldots)$ die Folge der Quadratzahlen in $\mathbb{N}$.

2. Mit $b_n = \frac{1}{n}$ ist $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ die Folge der sogenannten Hauptbrüche in $\mathbb{Q}$.

3. Mit $c_n = (-1)^n$ ist
   $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

4. Mit $d_n = 2^n$ ist
   $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots)$ die Folge der Zweierpotenzen.

5. Mit $y_n = \big(-\frac{1}{3}\big)^n$ ist

$$y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \dots\Big).$$

6. Ist $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, dann ist

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots\Big)$$

Einige weitere Folgenglieder sind in der folgenden Tabelle angegeben:

n	1	10	100	1000
x_n	2	2.59374	2.70481	2.71692

n	10000	100000	1000000
x_n	2.71814	2.71826	2.71828

7. Die sogenannte *Fibonacci-Folge* ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ und } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 3.$$

Die ersten Folgenglieder sind

$$a = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots).$$

Die Zahl a_n heißt die n-te Fibonaccizahl.

Folgen lassen sich auch als Abbildungen auffassen.

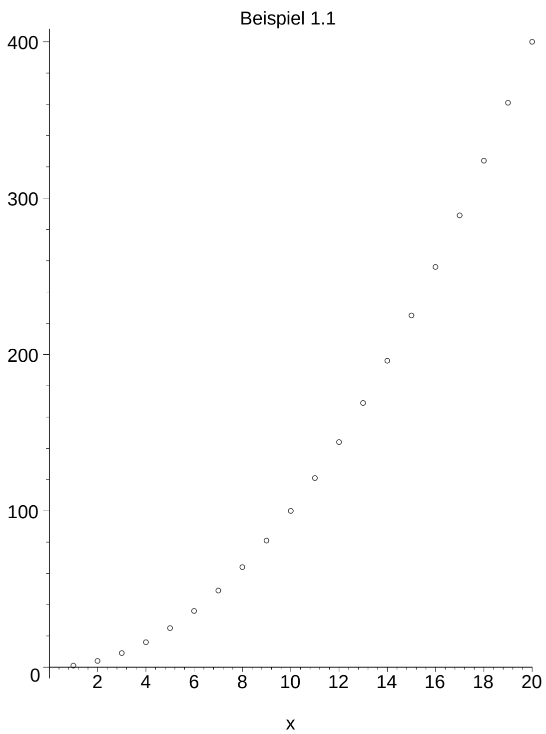
Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$. Für den Wert $a(n)$ an der Stelle n schreibt man üblicherweise a_n. Der Wert a_n heißt n-tes Folgenglied von a.

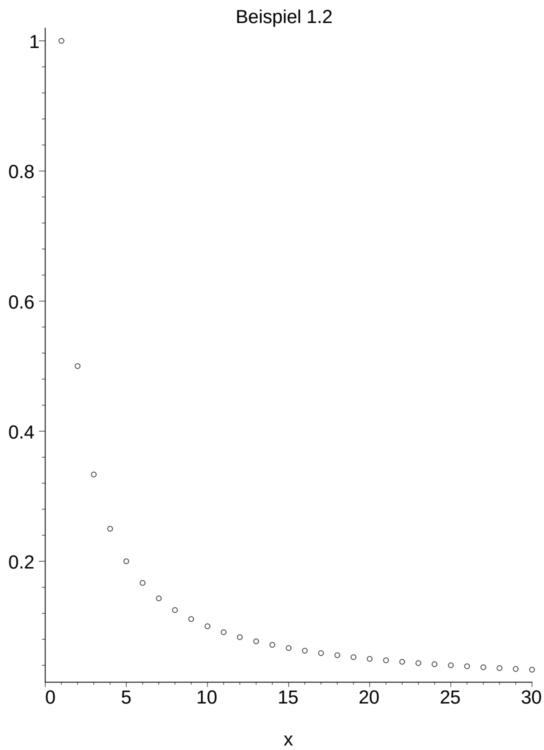
Die Fibonacci-Folge heißt *rekursiv* definiert, da man zur Berechnung eines Folgenglieds a_n die vorherigen Folgenglieder benötigt (und Anfangswerte). Die anderen Folgen hingegen sind *explizit* definiert, da sich jedes a_n direkt aus dem Index n berechnen läßt.

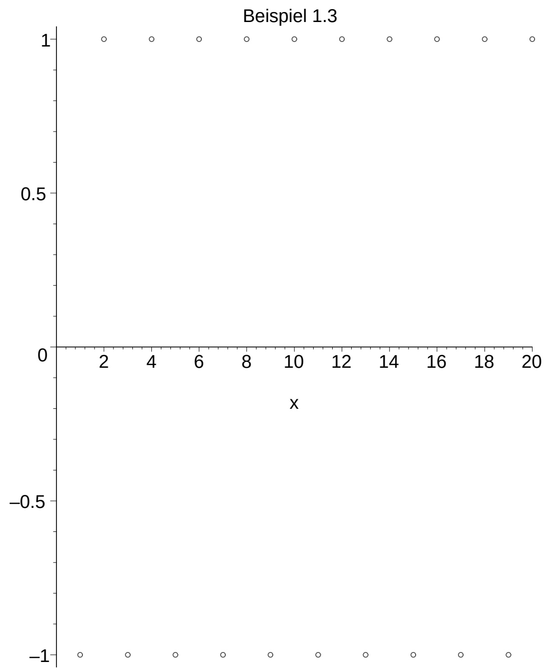
Man kann auch für die Fibonacci-Folge eine explizite Formel angeben. Die n-te Fibonacci-Zahl a_n ist nämlich

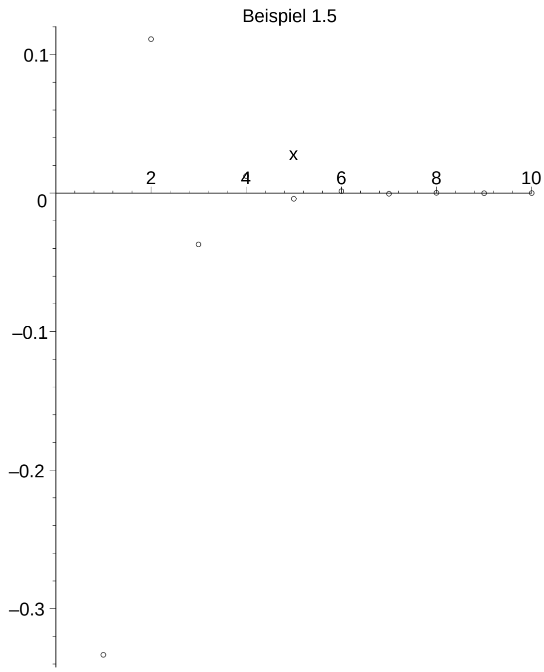
$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

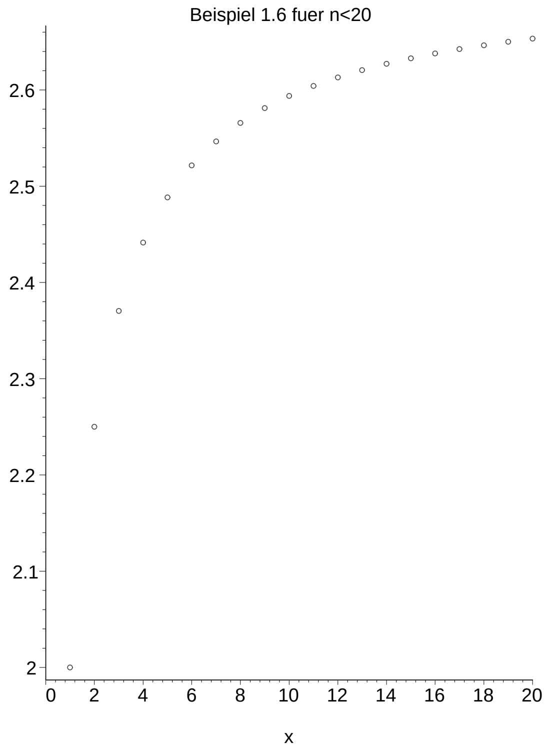
Wir können eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ graphisch veranschaulichen, indem wir die Punkte mit den Koordinaten (n, a_n) für einige Werte von n in ein Koordinatensystem zeichnen.

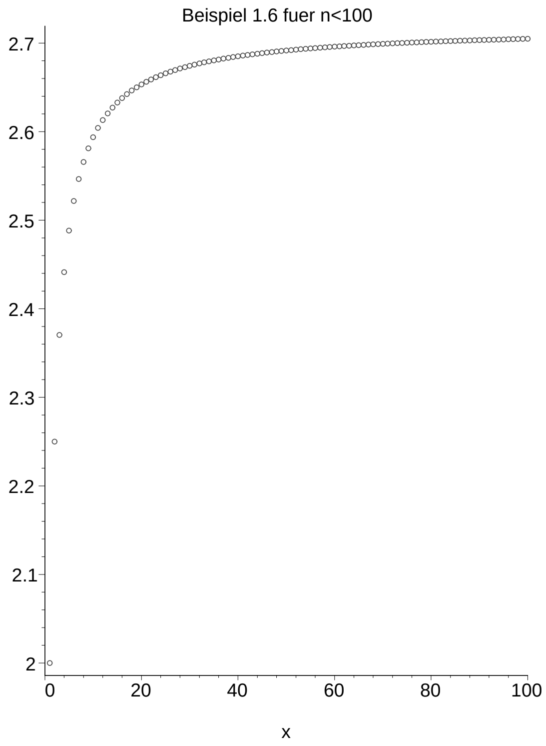


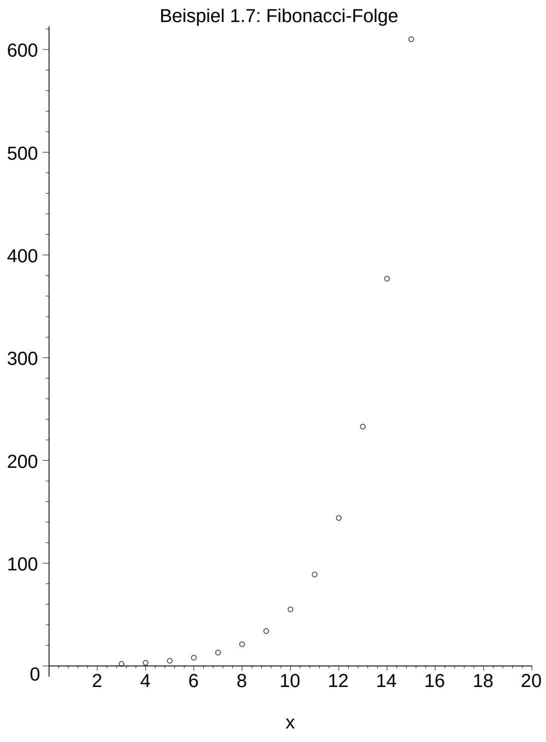







Beispiel 1.6 fuer n<20
2.6
2.5
2.4
2.3
2.2
2.1
2
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
x


Beispiel 1.6 fuer n<100
2.7
2.6
2.5
2.4
2.3
2.2
2.1
2
0 20 40 60 80 100
x


Beispiel 1.7: Fibonacci-Folge
600
500
400
300
200
100
0
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
x

Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt *geometrisch*, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, wenn es also eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 2. • Die Folge aus Beispiel 1.4 ist geometrisch, denn

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ebenso ist jede Folge mit der Vorschrift $d_n = q^n$ für ein festes $q \in \mathbb{R}$ geometrisch.

• Die anderen Folgen in Beispiel 1. sind nicht geometrisch. So ist etwa für die Folge mit $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{2}{3}, \text{ aber } \frac{b_4}{b_3} = \frac{3}{4}.$$

Beispiel 3. Ein Anfangskapital K_0 wird zum Zinssatz von $p = 0.05$ (also 5%) jährlich verzinst. Dann ist nach

n Jahren das Kapital angewachsen auf den Wert K_n, der sich wie folgt berechnet (Zinseszinz!);

$$K_1 = K_0 + pK_0 = (1+p)K_0,$$
$$K_2 = K_1 + pK_1 = (1+p)K_1 = (1+p)^2 K_0,$$
$$K_3 = K_2 + pK_2 = (1+p)K_2 = (1+p)^3 K_0,$$

und allgemein

$$K_n = (1+p)^n K_0.$$

Die Folge der jährlichen Kapitalmenge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also geometrisch, da $\frac{K_{n+1}}{K_n} = 1 + p$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für eine geometrische Folge mit dem konstanten Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

gilt $a_{n+1} = qa_n$ und daher

$$a_2 = qa_1, \quad a_3 = qa_2 = q^2 a_1, \quad a_4 = qa_3 = q^3 a_1$$

und allgemein $a_n = a_1 q^{n-1}$ oder

$$\boxed{a_n = a_0 q^n}$$

wobei $a_0 := \frac{a_1}{q}$. Wir können a_0 als das nullte Folgenglied auffassen.

Eine geometrische Folge ist also vollständig durch den Quotienten q und einen Anfangswert a_0 (oder a_1) bestimmt.

Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *arithmetisch*, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, wenn es also eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt

$$a_{n+1} - a_n = d \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 4. Die Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 3n - 7$ ist arithmetisch, denn

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 7 - \big(3n - 7\big) = 3 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die ersten Folgenglieder sind $-4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8, \ldots$.

Ist eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmetisch mit der konstanten Differenz

$$a_{n+1} - a_n = d \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

dann gilt $a_{n+1} = d + a_n$ und die einzelnen Folgenglieder ergeben sich durch

$$\begin{aligned} a_2 &= d + a_1, \\ a_3 &= d + a_2 = d + d + a_1 = 2d + a_1, \\ a_4 &= d + a_3 = 3d + a_1 \end{aligned}$$

und allgemein $a_n = (n-1)d + a_1$ oder

$$\boxed{nd + a_0}$$

wobei $a_0 = a_1 - d$ wie bei der geometrischen Folge als nulltes Folgenglied interpretiert werden kann.

Eine arithmetische Folge ist also vollständig durch die Differenz d und einen Anfangswert a_0 (oder a_1) bestimmt.

Ähnlich wie für Abbildungen wollen wir nun die Begriffe Monotonie und Beschränktheit für Folgen erklären. Zusätzlich gibt es noch den Begriff der alternierenden Folge (machen Sie sich klar, daß die Begriffe Monotonie und Beschränktheit sowohl für Folgen als auch reelle Funktionen sinnvoll sind, alternierend aber für Abbildungen auf $\mathbb{R}$ nicht sinnvoll definiert werden kann.

- Eine Folge a heißt *konstant*, falls $a_{n+1} = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend* bzw. *streng monoton wachsend*, falls

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ bzw. } a_{n+1} > a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton fallend* bzw. *streng monoton fallend*, falls

$$a_{n+1} \leq a_n \text{ bzw. } a_{n+1} < a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Eine Folge heißt *alternierend*, falls $a_{n+1} > 0$ ist wenn $a_n < 0$ ist und $a_{n+1} < 0$ wenn $a_n > 0$ ist. Anders gesagt: $a_{n+1}a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (d. h. die Folgenglieder wechseln in jedem Schritt das Vorzeichen).

Beispiel 5. • Betrachte die Folgen aus Beispiel 1. Die Folgen a und d mit $a_n = n^2$ und $d_n = 2^n$ sowie die Fibonacci-Folge sind streng monoton wachsend.

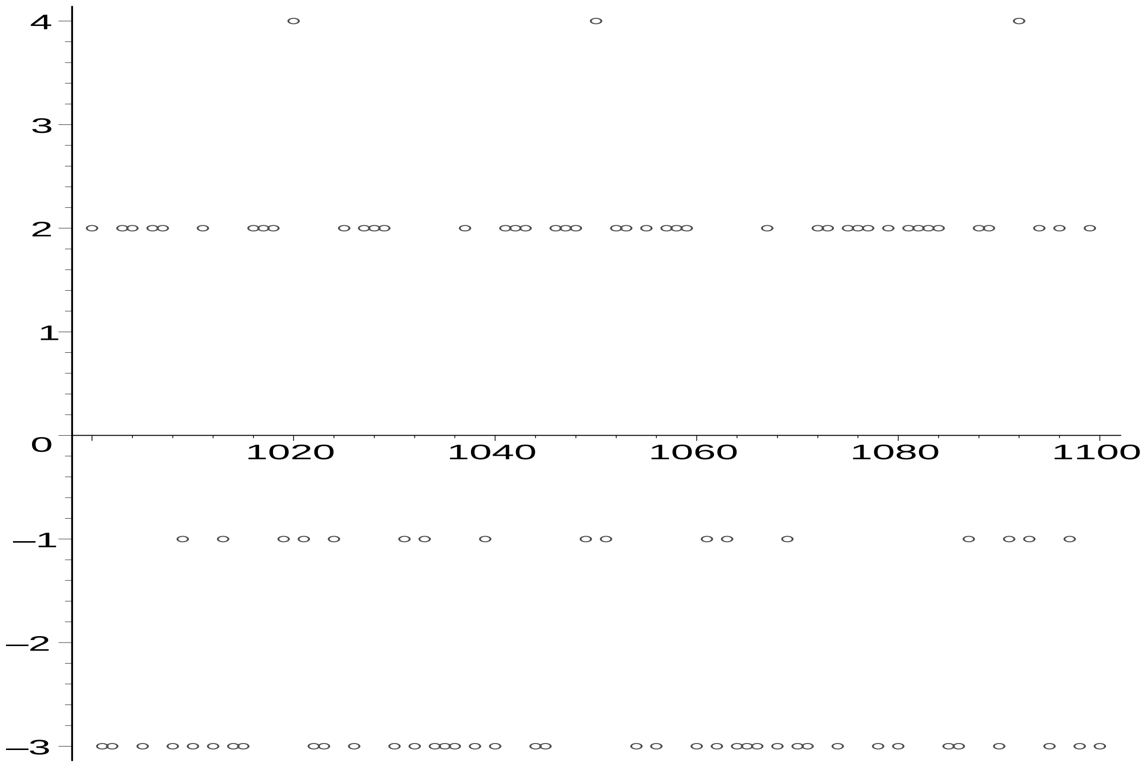
- Die Folge b mit $b_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend.

- Die Folge c mit $c_n = (-1)^n$ ist weder monoton wachsend noch monoton fallend. Sie ist alternierend.

- Die Folge x mit $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist streng monoton wachsend. Das wird zumindest durch den Graphen angedeutet und es läßt sich auch nachrechnen.

- Außerdem ist auch die Folge der Kapitalmengen in Beispiel 3. bei konstanter jährlicher Verzinsung streng monoton wachsend. Das sollte natürlich auch so sein!

- Beachte, dass es auch Folgen gibt, die weder monoton wachsend noch monoton fallend noch alternierend sind. Wenn wir mit t_n die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n bezeichnen, so sieht der Graph der Folge $(-1)^{t(n)}t(n)$ für $1000 \leq n \leq 1100$ so aus:



Für die besonders wichtigen geometrischen Folgen ist das Monotonieverhalten wie folgt:

> Seien $a_0 > 0$ und $q > 0$. Die geometrische Folge a mit $a_n = a_0 q^n$ ist streng monoton wachsend, wenn $q > 1$ ist, streng monoton fallend, wenn $q \in (0, 1)$ ist, und konstant, wenn $q = 1$ ist. Für $q < 0$ und $a_0 > 0$ ist die geometrische Folge $a_n = a_0 q^n$ alternierend.

Beispiel 6. • Die Folge $a_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist streng monoton fallend. Die ersten Folgenglieder sind

$$a_1 = \frac{5}{2},\ a_2 = \frac{5}{4},\ a_3 = \frac{5}{8},\ a_4 = \frac{5}{16},\ a_{10} = \frac{5}{1024}.$$

- Für $a_n = 5\big(-\frac{1}{2}\big)^n$ erhalten wir

$$a_1 = -\frac{5}{2},\ a_2 = \frac{5}{4},\ a_4 = \frac{5}{16},\ a_5 = -\frac{5}{32},\ a_{10} = \frac{5}{1024}$$

Die Folge ist alternierend. Wir halten fest, dass die Folge $(|a_n|)$ der Beträge von a_n monoton fallend ist.

> Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls es eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
>
> $$|a_n| \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$
>
> d. h. alle Folgenglieder liegen im Intervall $[-M, M]$.

Beispiel 7. • Die Folgen a und d mit $a_n = n^2$ und $d_n = 2^n$ sowie die Fibonacci-Folge aus Beispiel 1. sind nicht beschränkt.

- Die Folge b mit $b_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt, denn $\left|\frac{1}{n}\right| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Die Folge c mit $c_n = (-1)^n$ ist beschränkt: $|(-1)^n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Die Kapitalzuwachsfolge aus Beispiel 3. ist unbeschränkt. Wenn man nur lange genug wartet, wird das Kapital beliebig groß.

- Eine geometrische Folge a mit $a_n = a_0 q^n$ ist unbeschränkt, wenn $|q| > 1$ ist und beschränkt, wenn $q \in [-1, 1]$ ist.

Zur Beschreibung des Verhaltens einer Folge bei wachsendem Index wird, wie schon bei Funktionen, der Begriff **Konvergenz eingeführt.**

Zunächst einige anschauliche Beispiele von Konvergenz.

Beispiel 8. • Die Folgenglieder aus Beispiel 1.1 und 1.4 werden für wachsende n immer größer. Anders: sie gehen gegen $+\infty$.

- Die Folgenglieder aus Beispiel 1.2 kommen für wachsende n immer näher an die x-Achse, anders: die Werte kommen der Null immer näher.

- In der Folge aus Beispiel 1.3 wechseln sich die Werte 1 und -1 ab. Die Folge kommt weder dem Wert 1

noch dem Wert -1 beliebig nahe, weil immer wieder der jeweils andere Wert angenommen wird.

- Die Folgenglieder aus Beispiel 1.5 wechseln sich mit dem Vorzeichen ab, aber wie in Beispiel 2 kommen die Werte der Null, also der x-Achse, immer näher.

- Der Graph der Folge aus Beispiel 1.6 deutet an, dass die Folgenglieder zwar stets anwachsen, aber nicht beliebig groß werden, sondern sich einem Wert nähern. Was ist der genaue Wert?

Grenzwert (Limes) von Folgen
Eine reelle Zahl a heißt *Grenzwert* oder *Limes* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ einen von ϵ abhängigen Index $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n(\epsilon).$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* wenn sie einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt. In diesem Fall schreiben wir:

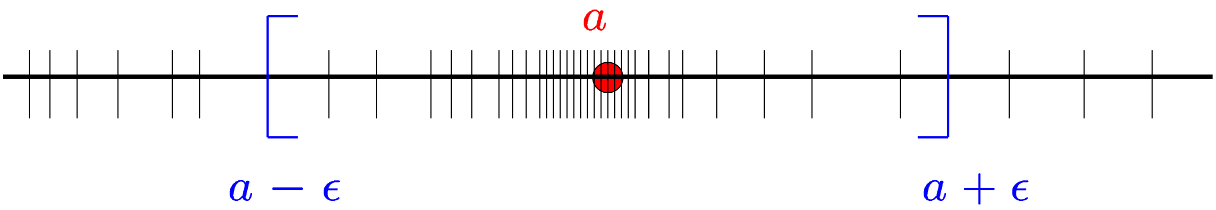
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

Sprechweise: *Limes n gegen unendlich von a_n ist gleich a*, oder: *a_n konvergiert gegen a für n gegen unendlich*. Ist der Grenzwert $a = 0$, so heißt die Folge eine *Nullfolge*.

Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie *divergent*. Man sagt auch: *die Folge divergiert*.

Mn kann sich die Konvergenz gegen a auch folgendermaßen klar machen:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ nur *endlich* viele Folgenglieder *nicht* im Intervall $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ liegen; ein solches Intervall heißt auch eine ϵ-*Umgebung von* a.
Alternative Sprechweise: *fast alle* Folgenglieder (d.h. mit Ausnahme von höchstens endlich vielen) liegen im Intervall $[a-\epsilon, a+\epsilon]$. Insbesondere gibt es also nur einen Grenzwert für eine konvergierende Folge.



Beispiel 9. • Die Folge a mit $a_n = n^2$ aus Beispiel 1.1 ist divergent.

- Die Folge b mit $b_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.
- Die Folge c mit $c_n = (-1)^n$ ist divergent.
- Die Folge d mit $d_n = 2^n$ ist divergent.
- Die Folge y mit $y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ist eine Nullfolge.

- Die Folge x mit $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist konvergent, ihr Grenzwert ist die **Eulersche Zahl** e, also

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818$$

- Die Fibonacci-Folge ist divergent.

Aus der Definition der Konvergenz folgt sofort

Jede konvergente Folge ist beschränkt.