Beispiel 10.

a_n	$a + nd$	$aq^n \quad (a > 0)$		$\frac{1}{n}$	$\frac{(-1)^n}{n}$
(1)	$d \geq 0$	$q \geq 1$		$-$	$-$
(1a)	$d > 0$	$q > 1$		$-$	$-$
(2)	$d \leq 0$	$0 \leq q \leq 1$		$+$	$-$
(2a)	$d < 0$	$0 < q < 1$		$+$	$-$
(3a)	$d \leq 0$	$-1 \leq q \leq 1$		$+$	$+$
(3b)	$d \geq 0$	$q \geq -1$		$+$	$+$
(3)	$d = 0$	$-1 \leq q \leq 1$		$+$	$+$
(4)	$d = 0$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$+$	$+$
Limes	a	0	a	0	0

Die Zeileneinträge bedeuten:
(1): monoton steigend; (1a): streng monoton steigend
(2): monoton fallend; (2a): streng monoton fallend
(3a)/(3b): nach oben/unten beschränkt
(3): beschränkt
(4): konvergent

Ein sehr wichtiges Konvergenzkriterium ist das folgende:

> Jede beschränkte und monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, d.h. es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiel 11. Die Folge $\frac{3}{(n+1)}$ ist monoton (fallend) und beschränkt, also konvergent, und der Grenzwert ist 0. Die Folge $\frac{(-1)^{n^2}}{7n}$ ist nicht monoton (aber beschränkt). Diese Folge ist auch konvergent (ihr Grenzwert ist ebenfalls 0). Es kann also durchaus nicht monotone Folgen geben, die konvergieren. Unbeschränkt kann eine konvergente Folge aber nicht sein.

Rechenregeln für Grenzwerte

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b\ .$$

2. $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b\ .$$

3. Sei $b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\ .$$

4. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Folge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a \ .$$

5. Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Die fünfte der hier angegebenen Regeln ist ein Spezialfall eines viel allgemeineren Sachverhaltes:

Satz 1 Sei f eine auf (a, b) stetige Funktion. Ferner sei $x \in (a, b)$ und x_n eine Folge reeller Zahlen mit $x_n \in (a, b)$ für alle n. Wenn dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt, so ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Es genügt hier sogar, $x_n \in (a, b)$ nur für alle $n > n_0$ für eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ zu verlangen.

Wir geben gleich eine Menge an Beispielen an, wie wir die oben angegebenen Sachverhalte ausnutzen können. Wir müssen, grob gesagt, den algebraischen Ausdruck, der die Folgenglieder a_n definiert, in Teilausdrücke zerlegen, von denen wir dann jeweils die Grenzwerte kennen. Bevor wir zu den Beispielen kommen, hier ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium:

Ausquetschen

Seien $(a'_n), (a''_n)$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a'_n = a = \lim_{n\to\infty} a''_n \,.$$

Ist (a_n) eine Folge mit

$$a'_n \leq a_n \leq a''_n \quad \text{für alle} \;\; n \,,$$

dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \,.$$

Als Spezialfall erhalten wir für Nullfolgen:

Sei (a_n') eine Nullfolge. Ist (a_n) eine Folge mit

$$|a_n| \leq a_n' \quad \text{für alle} \;\; n\,,$$

dann ist auch (a_n) eine Nullfolge.

Beispiel 12.

(1) Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (3+\frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 3.$$

(3) Für $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

(4) Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
Bei dieser Folge hilft ein Umformungstrick weiter:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

und daher ist

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0.$$

(5) Wie berechnet ein Computer Quadratwurzeln?

Heronsches Verfahren:
Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, soll $\sqrt{a}$ berechnet werden.
Wähle einen beliebigen Startwert $x_1 > \sqrt{a}$ und setze für $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \tag{8}$$

Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, beschränkte Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$: Überlegen wir uns zunächst, dass die Folge nach unten beschränkt ist: Weil $x_1 > 0$ und $a > 0$ ist, ist auch $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}) > 0$. Ferner ist die Folge monoton fallend: Dazu berechnen wir den Quotienten x_{n+1}/x_n:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) < 1$$

sofern $x_n^2 > a$ ist. Nun wissen wir aber, dass $x_1^2 > a$ ist. Damit ist auch

$$x_2^2 = \frac{1}{4}\left(x_1^2 + 2a + \frac{a^2}{x_1^2}\right) = \frac{1}{4}\left((x_1 - \frac{a}{x_1})^2 + 4a\right) > a.$$

Wenn wir dieses Argument wiederholen, ist auch $x_3^2 > a$ (denn nun ist $x_2^2 > a$) usw, also stets $x_n^2 > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen also, dass die Folge x_n konvergieren muss, denn sie ist eine beschränkte monoton fallende Folge. Nun ist aber der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{n-1})$. Wenn wir das in unsere Gleichung (8) einsetzen, erhalten wir

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$$

und somit die quadratische Gleichung $x^2 = a$, also $x = \sqrt{a}$ (denn wir wissen ja $x_n > 0$ für alle n, also $x > 0$).

Beispiel 13. Als einen etwas komplizierteren Grenzwert wollen wir hier zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Dazu benötigen wir den binomischen Lehrsatz

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}}$$

Hier ist

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

(gelesen: n über i), wobei

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots 2 \cdot 1$$

die Fakultät von m ist (das ist das Produkt aller natürlichen Zahlen $\leq m$). Machen wir uns dies an einem Beispiel klar:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \\ &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \end{aligned}$$

Der binomische Lehrsatz verallgemeinert die binomischen Formeln (Spezialfall $n=2$).

Wir wollen etwas über die Konvergenz von $a_n = \sqrt[n]{n}$ aussagen. Dazu definieren wir $b_n = a_n - 1$ und berechnen

$(b_n + 1)^n$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$(b_n + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_n^i 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_n^i = n, \quad (9)$$

weil ja $b_n + 1 = \sqrt[n]{n}$. Die Gleichung (9) zeigt

$$\binom{n}{2} a_n^2 \leq n,$$

also

$$\frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \leq n, \text{ also } a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Ferner gilt $a_n \geq 1$, somit

$$1 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

und deshalb ("Ausquetschen")

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Wir haben bereits ein Beispiel einer Folge gesehen, die die Entwicklung eines Anfangskapitals K_0 bei einer p–prozentigen Verzinsung beschreibt. Wenn $x = p/100$

ist, gilt für das Kapital nach m Jahren

$$K_n = (1+x)^m K_0$$

nach einem Jahr also $(1+x)K_0$. Nun könnte man es doch als fair empfinden, wenn man statt einmal jährlich p Prozent Zinsen zu bekommen, monatlich $p/12$ Prozent gutgeschrieben bekommt. Dann wäre das Kapital nach einem Jahr

$$\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12} K_0$$

Bei einer täglichen Verzinsung ist das schon

$$\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365} K_0$$

Vergleichen wir, wie stark sich das Kapital bei den diversen Verzinsungssmodellen und $x = 0.05$, d.h. bei eienr p–prozentigen Verzinsung, vergrössert:

$1+x$	$\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12}$	$\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365}$
1.05	1.05116	1.05127

Genauere Untersuchungen zeigen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828\ldots \\ \text{und} & \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \end{array}}$$

Die Zahl e heißt Eulersche Zahl.

Interessant ist, dass Banken bei Krediten eher eine monatliche Verzinsung wählen, bei Zinszahlungen aber eher nur jährlich abrechnen.

Die unterschiedlichen Modelle können sich nach mehrerern Jahren schon bemerkbar machen, wenn auch nicht sehr dramatisch. Wir können die Exponentialfunktion e^x oder, wenn es um das Wachstum in m Jahren geht, die Funktion $e^{mx} = (e^x)^m$ als eine Grenzfunktion interpretieren, die das Wachstum bei einer kontinuierlichen oder stetigen Verzinsung beschreibt. Wir setzen wieder $x = 0.05$:

	$(1+x)^m$	$\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12m}$	e^{mx}
$m=1$	1.05	1.0512	1.0513
$m=2$	1.1025	1.1049	1.1052
$m=5$	1.2763	1.2834	1.2840
$m=10$	1.6289	1.6470	1.6487
$m=20$	2.6533	2.7126	2.7183
$m=30$	4.3219	4.4677	4.4817

Abschreibungen

Folgen treten in der Ökonomie etwa beim Thema Abschreibungen auf (SCHWARZE, Kapitel 8.6). Wichtig sind hier die folgenden drei Größen:

A: Anschaffungsaufwendungen
R: Restwert am Ende der Nutzungsdauer
T: Nutzungsdauer (in Jahren)
a_n Abschreibungsbetrag im n-ten Jahr, $n = 1, \ldots, T$

Wir unterscheiden drei Typen von Abschreibungen:

Lineare Abschreibung
Arithmetisch-degressive Abschreibung
Geometrisch-degressive Abschreibung

Beginnen wir mit der linearen Abschreibung. In diesem Fall wird in jedem Jahr derselbe Betrag a abgeschrieben, wir erhalten also

$$\boxed{a = \frac{A - R}{T}.}$$

Die Abschreibungsbeträge sind also konstant.

Bei der arithmetisch-degressiven Abschreibung bilden die a_n eine arithmetische Folge, d.h.

$$a_n = a_1 - (n - 1)d$$

Wenn hier A, R und T bekannt sind, kann nicht unmittelbar auf a_1 **und** d geschlossen werden. Man kann die Abschreibung aber genau bestimmen, wenn der letzte Abschreibungsbetrag genau d sein soll, also $a_T = d$. Dann gilt nämlich

$$\boxed{d = \frac{A - R}{\frac{1}{2}T(T + 1)}.}$$

Der Grund für diese Formel ist folgender: Im ersten Jahr wird Td abgeschrieben, dann $(T - 1)d$, dann $(T - 2)d$ usw, bis im T-ten Jahr d abgeschrieben wird. Insgesamt gilt dann

$$A - R = \sum_{i=1}^{T} i \cdot d = d \cdot \sum_{i=1}^{T} i.$$

Man kann zeigen

$$\sum_{i=1}^{T} i = \frac{T(T+1)}{2},$$

woraus die Formel für d folgt.

Bei der geometrisch-degressiven Abschreibung bilden die Abschreibungsbeträge a_n eine geometrische Reihe, bezogen auf A also

$$a_n = Ap^n$$

für ein $0 < p < 1$. Der Prozentsatz $100p$ heißt der Abschreibungsprozentsatz: In jedem Jahr werden p Prozent des Anschaffungswertes abgeschrieben. Setzen wir $q = 1 - p$, so ist der Buchwert nach einem Jahr $A - Ap = Aq$, nach zwei Jahren Aq^2 und nach T Jahren Aq^T, also

$$\boxed{R = A(1-p)^T.}$$

Man kann diese Formel auch nach p auflösen:

$$\boxed{p = 1 - \sqrt[T]{\frac{R}{A}}.}$$

Beachten Sie: $0 < p < 1$, deshalb entspricht p gerade einem Prozentsatz von $100p$ Prozent.