3.2 Reihen

Aus Folgen lassen sich durch Aufaddieren weitere Folgen konstruieren. Das sind die sogenannten Reihen, sie spielen in der Rentenrechnung eine wichtige Rolle. Die entsprechenden Beispiele werden dann im nächsten Abschnitt über die Grundbegriffe der Finanzmathematik behandelt.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.
Wir definieren die n**-te Partialsumme** (oder: Teilsumme) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch Aufaddieren der ersten n Folgenglieder, also

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt eine **(unendliche) Reihe** und wird auch als $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ geschrieben.

Die Bezeichnung n-te Partialsumme bezieht sich auf die Anzahl der aufsummierten Folgenglieder. Beachten Sie, dass zur Darstellung der n-ten Partialsumme mit dem Summenzeichen ein zweiter Laufindex, hier k, benötigt wird.

Bei Reihen treten also immer zwei verschiedene Folgen auf: die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der einzelnen Glieder und die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, das ist gerade die Reihe.

Beispiel 14.

1. Sei $a_n = \frac{1}{n}$. Dann ist $s_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   etwa

$$s_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$s_{10} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10} = \frac{7381}{2520} \approx 2,93,$$

$$s_{100} \approx 5,19 \quad s_{10000} \approx 9,79.$$

   Die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **harmonische Reihe**.

2. Ist $a_n = \frac{1}{2^n}$, dann ist

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$s_{10} = \frac{1023}{1024} \approx 0,999$$

$$s_{100} \approx 0,99999999999999999999999999999921114$$

3. Sei $a_n = n$. Dann ist

   $$s_2 = 3,\ s_{10} = 1 + 2 + \ldots + 10 = 55,\ s_{100} = 5050.$$

4. Sei $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Dann ist

   $$s_3 = -1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{5}{6}, \quad s_{10} = \tfrac{-1627}{2520} \approx -0,6456,$$
   $$s_{5000} \approx -0,6930,\ s_{10000} \approx -0,6931.$$

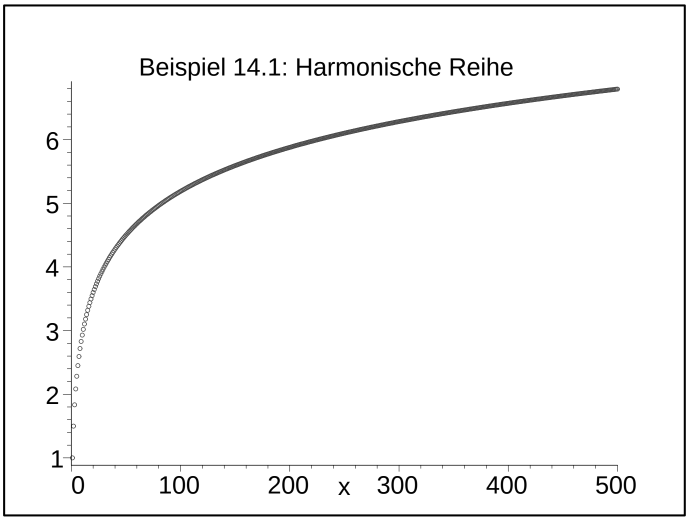
   In diesem Fall heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **alternierende harmonische Reihe**.

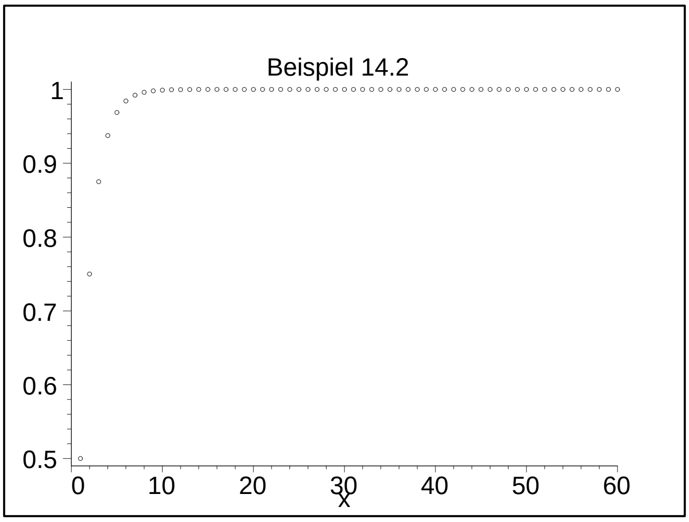
5. Ist $a_n = (-1)^n$, dann ist die Folge der Partialsummen gegeben durch

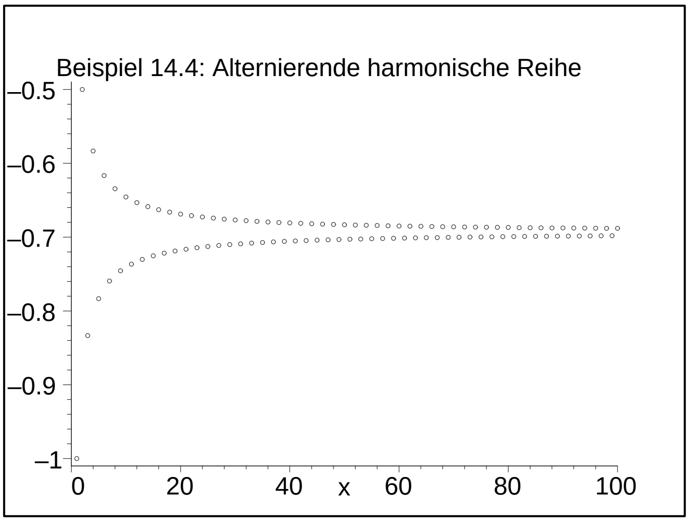
   $$\begin{array}{ll} s_1 = -1, & s_2 = -1 + 1 = 0, \\ s_3 = -1 + 1 + (-1) = -1, & s_4 = 0 \end{array}$$

   und allgemein $s_{2n} = 0$ und $s_{2n-1} = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Graphen der Folgen in Beispiel 14.1, 2 und 4 sehen folgendermaßen aus.


Beispiel 14.1: Harmonische Reihe
6
5
4
3
2
1
0
100
200
x
300
400
500


Beispiel 14.2
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0
10
20
30
x
40
50
60


Beispiel 14.4: Alternierende harmonische Reihe
–0.5
–0.6
–0.7
–0.8
–0.9
–1
0
20
40
x
60
80
100

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge, so heißt $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **geometrische Reihe**.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine arithmetische Folge, so heißt $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **arithmetische Reihe**.

Da bei geometrischen bzw. arithmetischen Folgen alle Folgenglieder bereits durch a_1 und den Quotienten q bzw. die Differenz d vollständig festgelegt sind, lassen sich auch die Partialsummen allein aus a_1 und q bzw. d berechnen.

1. Sei (a_n) eine arithmetische Folge mit $a_{n+1} = a_n + d$. Dann ist
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \left(a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2}\right).$$

2. Ist (a_n) eine geometrische Folge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, so ist
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} n a_1 & \text{falls } q = 1, \\ a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{falls } q \neq 1. \end{cases}$$

Beispiel 15.

1. Die Folge $a_n = \frac{1}{2^n}$ ist geometrisch. Daher bilden die zugehörigen Partialsummen eine geometrische Reihe und lassen sich berechnen durch
$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = \frac{2^n - 1}{2^n},$$
siehe etwa s_{10} in Beispiel 14.2.

2. Die Folge $a_n = n$ aus Beispiel 14.3 ist arithmetisch mit $d = 1$ und $a_1 = 1$. Folglich ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen eine arithmetische Reihe und die Summen lassen sich berechnen durch
$$s_n = n\Big(1 + \frac{n-1}{2}\Big) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Für die geometrische Folge $a_n = 5 \cdot 3^n$ ergeben sich die Partialsummen
$$s_n = 15\frac{3^n - 1}{2},$$
etwa $s_{10} = 442.860$.

4. Ist $a_n = \dfrac{3}{4^{n+1}}$, dann ist mithilfe der Rechenregeln für Summen aus Abschnitt 1.2 (Seite 28)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{4}\Big)^k = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{4}\Big)^k \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{16}\cdot\frac{4(1-(\frac{1}{4})^n)}{4-1} = \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{4} \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist $s_5 = \frac{1-(\frac{1}{4})^5}{4} = \frac{1023}{4096} \approx 0,2498$.

Geometrische Reihen treten z.B. in der Rentenrechnung auf, ein Beispiel folgt im nächsten Abschnitt.

Da Reihen nur eine spezielle Form von Folgen sind, lassen sich die Begriffe aus dem letzten Abschnitt übertragen.

Eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

heißt **(streng) monoton steigend** oder **fallend** bzw. **beschränkt**, falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diese Eigenschaften hat.

Beispiel 16.

- Die harmonische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend, da in jedem Schritt eine positive Zahl addiert wird.

- Allgemein ist jede Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend (bzw. fallend), wenn $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

- Für alle $a, q > 0$ ist die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} aq^n\right)$ streng monoton steigend.

- Für $a > 0$ und $q < 0$ ist die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} aq^n\right)$ weder streng monoton steigend noch fallend, denn es wird abwechselnd eine positive Zahl addiert oder subtrahiert. So ist etwa für $q = -\frac{1}{2}$

  $$s_1 = -0,5, \qquad s_2 = -0,25, \qquad s_3 = -0,375,$$
  $$s_4 = -0,3125, \quad s_5 = -0,34375.$$

Auch der Grenzwertbegriff läßt sich übertragen.

Eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

heißt **konvergent** (bzw. **divergent**), wenn sie als Folge konvergiert (bzw. divergiert). Ist sie konvergent, so schreiben wir für den **Grenzwert**

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ .$$

Beachten Sie, dass das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ den Grenzwert der Reihe (und nicht die Reihe selbst) bezeichnet, sofern er existiert.

Beispiel 17.

1. **Harmonische Reihe:**
   Die zur Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gehörende Reihe $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})_{n\in\mathbb{N}}$ ist (bestimmt) divergent, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \;.$$

2. Dezimalzahlen:
   Eine Zahl $r = r_0, r_1 r_2 r_3 \cdots$ mit $r_0 \in \mathbb{N}_0$ und $r_n \in \{0, \ldots, 9\}$ für $n \geq 1$ hat den Wert

$$r = r_0 + r_1 \frac{1}{10} + r_2 \frac{1}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \cdot 10^{-k}$$

   Sie ist also gerade der Grenzwert der zur Folge $(r_k \cdot 10^{-k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörenden Reihe $(\sum_{k=0}^{n} r_k \cdot 10^{-k})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dass diese Reihe tatsächlich immer konvergiert, wird später in Beispiel 23.2 noch mal begründet.

3. Die zur Folge $(\frac{1}{k^2+k})_{k\in\mathbb{N}}$ gehörende Reihe $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1\,,$$

denn $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und somit
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1.$$

Analog zeigt man die Konvergenz der Reihe

$$\Big(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

indem man $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ benutzt.

Es gibt eine sehr einfache notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge.

Satz 2 Ist die Reihe $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Achtung: die Umkehrung gilt nicht!

Erinnern Sie aus Abschnitt 1.3 (Seite 42), dass eine Implikation $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ist. Daher läßt sich obige Aussage auch formulieren als

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

Beispiel 18.

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{3n+5}{6n-1}$ ist **keine** Nullfolge, daher ist die zugehörige Reihe nicht konvergent.

2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, aber die zugehörige Reihe ist nicht konvergent. Das ist gerade die harmonische Reihe.

Es folgt nun sofort:

Die arithmetische Reihe zu der Folge mit $a_{n+1} = a_n + d$ konvergiert nur für $a_1 = d = 0$.

Die Beschreibung des Konvergenzverhaltens geometrischer Reihen ist etwas aufwendiger.

Grenzwert geometrischer Reihen:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{R}$ und $a_1 \neq 0$.

1. Ist $|q| < 1$, dann konvergiert die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} .$$

2. Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Insbesondere ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \infty & \text{für } q \geq 1 \end{cases}$$

Beachten Sie, dass die letzte Reihe mit dem Index $k = 0$ beginnt.

Beispiel 19. Sei $a_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n$ und $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{7}} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Die Konvergenz ist “sehr schnell”. Es ist zum Beispiel

$$s_{10} \approx 1,3999986, \;\; s_{16} \approx 1,399999999.$$

Durch einige Umformungen läßt sich auch Konvergenzverhalten und Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k - 3}{7^{k+1}}$$

bestimmen. Diese Reihe ist nicht geometrisch, setzt sich aber aus geometrischen Reihen zusammen. Setze $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k-3}{7^{k+1}}$. Dann ist nach den Rechenregeln für Summen (Abschnitt 1.2, Seite 28)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{7^{k+1}} - \frac{3}{7^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^k$$

$$= \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{7}\right)^k - \frac{3}{7}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{7}\right)^k.$$

Also folgt nach den Grenzwertformeln für die geometrische Reihe sowie nach den Rechenregeln für

Grenzwerte von Folgen (Abschnitt 3.1, Seite 200/201)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^k - \frac{3}{7}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^k$$
$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{5} - \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -0,3.$$

Für Reihen gibt es — im Gegensatz zu Folgen — einige einfache Kriterien für Konvergenz. Sie besagen allerdings nur, **ob** eine gegebene Reihe konvergiert, geben aber nicht den zugehörigen Grenzwert an. Ein hinreichendes Kriterium für spezielle Reihen ist das

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann ist die alternierende Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergent.

Es ist wichtig, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da sonst die Folge $\left((-1)^k a_k\right)$ gar nicht alternierend wäre.

Beispiel 20. Die alternierende harmonische Reihe

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert.

Vergleichen Sie die Divergenz der harmonischen und die Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe auch mit den zugehörigen Graphen auf Seite 217.
Ohne den genauen Grenzwert zu kennen, zeigen die in Beispiel 14.4 ausgerechneten Partialsummen, dass die Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe "sehr langsam" ist. Die Partialsummen s_{5000} und s_{10000} unterscheiden sich noch in der 4. Dezimalstelle. Vergleichen Sie dies auch mit der Konvergenz der geometrischen Reihe in Beispiel 19.

Quotientenkriterium:
Sei $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe, und es gebe ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$.

- Gibt es ein $c \in (0,1)$ mit
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq c \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$
dann konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Gibt es eine Zahl $c > 1$ mit
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq c \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$
dann ist die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Etwas einfacher, aber auch weniger aussagekräftig, ist die folgende Formulierung:

Ist die Folge der Quotienten $Q_k := \left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann gilt:

ist $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k < 1$, so konvergiert die Reihe $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

ist $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k > 1$, so divergiert die Reihe $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

ist $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = 1$, so ist keine Aussage möglich.

Beispiel 21.

1. Die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^3-2k}{3^k}$ ist konvergent, denn es ist $a_k = \frac{k^3-2k}{3^k} > 0$ für alle $k > 1$ und

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{(k+1)^3-2(k+1)}{3^{k+1}}\cdot\frac{3^k}{k^3-2k}\right| \\ &= \left|\frac{3^k(k^3+3k^2+3k+1-2k-2)}{3^{k+1}(k^3-2k)}\right| \\ &= \left|\frac{k^3+3k^2+k-1}{3(k^3-2k)}\right| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\end{aligned}$$

nach den Grenzwertregeln auf Seite 200/201. Also ist für genügend großes k der Quotient $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ stets kleiner als 1 und die Reihe konvergiert.

2. Die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k^2}$ konvergiert nicht,

   denn $a_k = \frac{3^k}{k^2} > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{3^{k+1}}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{3^k} = \frac{3k^2}{k^2+2k+1} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 3$$

   Also ist für genügend großes k der Quotient echt größer als 1.

3. Für die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ist keine Aussage möglich, denn
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{1} = \frac{k^2}{k^2+2k+1} \longrightarrow 1.$$

   Übrigens konvergiert diese Reihe, und zwar gegen $\frac{\pi^2}{6}$.

Besonders wichtig ist das folgende Beispiel.

Beispiel 22. Die Reihe

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

(erinnere $k!$ von Seite 206) konvergiert für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ nach dem Quotientenkriterium, denn mit $a_k = \frac{x^k}{k!}$ ist

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|^{k+1} \cdot k!}{|x|^k \cdot (k+1)!} = \frac{|x|}{k+1}.$$

Also ist für $k \geq 2 \cdot |x|$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \frac{|x|}{2|x|+1} < \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$$

Somit ist mit $c = \frac{1}{2}$ das Quotientenkriterium erfüllt, und die Reihe konvergiert.

Der Grenzwert der Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ stimmt mit dem früher definierten Wert e^x bzw. $\exp(x)$ überein (vgl. Seite 209), es gilt also

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Insbesondere ist für $x = 1$

$$e = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots .$$

Für kleine Werte von x — wie sie z.B. in der Zinsrechnung auftreten — liefert die Reihendarstellung von e^x bessere Näherungswerte für die Exponentialfunktion als die Folge $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Das zeigen etwa folgende Näherungswerte von $e \approx 2,718281828$ indem man $x = 1$ einsetzt:

n	$(1+\frac{1}{n})^n$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
1	2	2
2	$2,25$	$2,5$
3	$\approx 2,370$	$\approx 2,667$
4	$\approx 2,441$	$\approx 2,708$
5	$\approx 2,488$	$\approx 2,717$
10	$\approx 2,594$	$\approx 2,718281801$

Mit der Reihendarstellung läßt sich übrigens zeigen, dass e keine rationale Zahl ist.

Ein sehr praktisches Hilfsmittel zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens einer Reihe ist

Majoranten-Kriterium:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegebene Folge. Außerdem sei

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine konvergente Reihe, und es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| \leq b_n \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann konvergiert auch die Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Beispiel 23.

1. Die zur Folge $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ gehörende Reihe $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, denn

   $$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k} \text{ für alle } k \geq 2$$

   und die Reihe $(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Beispiel 17.3.

2. Die Reihe für Dezimalzahlen

   $$r = r_0 + r_1\frac{1}{10} + r_2\frac{1}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \cdot 10^{-k},$$

wobei $r_k \in \{0, \ldots, 9\}$ für $k \in \mathbb{N}$, konvergiert, da $r_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot 10^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{1 - \frac{1}{10}} = 10$$

aufgrund der Formel für den Grenzwert einer geometrischen Reihe (Seite 226).

3.3 Grundbegriffe der Finanzmathematik

Im weiteren werden die folgenden Bezeichnungen benutzt:

K_0	Anfangskapital
p	Zinsfuß pro Zeiteinheit (in %)
$d = \frac{p}{100}$	Zinssatz pro Zeiteinheit
$q = 1 + d$	Aufzinsungsfaktor
n	Anzahl der Zeiteinheiten (i.a. Jahre)
Z_n	Zinsen nach n Zeiteinheiten
K_n	Kapital nach n Zeiteinheiten

Zinsrechnung

(A) Die **lineare (einfache) Verzinsung**, bei der innerhalb eines Kapitalüberlassungszeitraumes kein Zinszuschlagtermin (oder Zinsverrechnungstermin) liegt, wird durch eine arithmetische Folge beschrieben.

Beispiel 24. Zum Zinssatz $d = 0,06 = 6\%$ p.a. wird das Kapital $K_0 = 100.000$ (DM oder € oder Maltesische Lira) für einen Zeitraum von 6 Jahren ausgeliehen. Damit ergibt sich

$$\begin{array}{ll} K_0 = 100.000, & \\ K_1 = K_0 \cdot (1+d), & Z_1 = K_0 \cdot d, \\ K_2 = K_0 \cdot (1+2\cdot d), & Z_2 = K_0 \cdot 2 \cdot d, \\ K_3 = K_0 \cdot (1+3\cdot d), & Z_3 = K_0 \cdot 3 \cdot d, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{array}$$

Nach 6 Jahren belaufen sich die Zinsen auf

$$Z_6 = K_0 \cdot 6 \cdot d = 36.000$$

und das (End)-Kapital beträgt

$$K_6 = K_0 \cdot (1 + 6 \cdot d) = 136.000\ .$$

Lineare Verzinsung:
Bei der linearen Verzinsung zum Zinssatz d ergeben sich die folgenden expliziten Formeln für das Kapital und die Zinsen nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot d) \quad \text{und} \quad Z_n = K_0 \cdot n \cdot d.$$

Beispiel 25. Welches Anfangskapital K_0 muss bei einfacher Verzinsung angelegt werden, wenn nach 7 Jahren ein Kapital von 100.000 € vorhanden sein soll und der Zinssatz $0,05$ bzw. $0,06$ beträgt?
Im ersten Fall muss die Gleichung

$$K_7 = 100.000 = K_0(1 + 7 \cdot 0,05) = K_0 \cdot 1,35$$

nach K_0 aufgelöst werden. Das ergibt ein benötigtes Anfangskapital von

$$K_0 = \frac{100000}{1,35} \approx 74.074 \text{ €}.$$

Im zweiten Fall ergibt sich analog

$$K_0 = \frac{100000}{1,42} \approx 70.422 \text{ €}.$$

(B) Neben der einfachen Verzinsung spielt natürlich die **Zinseszinsrechnung** eine wichtige Rolle. Hier gibt es innerhalb der Kapitalüberlassungsfrist weitere Zinsverrechnungs- oder Zinszuschlagtermine, in denen die bis dahin entstandenen Zinsen dem Kapital als Zinszuschlag hinzugefügt werden und mit ihm zusammen das weiter zu verzinsende Kapital bilden.
Wir betrachten noch einmal das obige Beispiel, wobei diesmal die Zinsen jährlich nachträglich dem Kapital zugeschlagen und ebenfalls verzinst werden.

Beispiel 26. Es wird das Kapital $K_0 = 100.000$ € für einen Zeitraum von 6 Jahren angelegt. Nach jeder Zinsperiode (1 Jahr) erfolgt ein Zinszuschlag von $d = 0,06 = 6\%$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} K_0 &= 100.000, \\ K_1 &= K_0 \cdot (1+d), \\ K_2 &= K_1 \cdot (1+d) = K_0 \cdot (1+d)^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nach 6 Jahren ist also das Gesamtkapital

$$K_6 = K_0 \cdot (1+d)^6 \approx 141.852 \text{ €}.$$

Zinseszinsrechnung:
Bei Berücksichtigung **nachschüssiger Zinseszinsen** ergeben sich die folgenden Formeln für das Kapital und die Zinsen nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \cdot (1+d)^n \quad \text{und} \quad Z_n = K_n - K_0.$$

Nachschüssigkeit bedeutet, dass die Zinsen am Ende des Jahres gezahlt werden.

Beispiel 27. Der Unterschied zwischen einfacher Verzinsung und (nachschüssigem) Zinseszins bezogen auf einen Zeitraum von bis zu 50 Jahren ist in der folgenden Tabelle für

$$K_0 = 1.000 \text{ und } d = 0,05 = 5\%$$

zu erkennen.

n	1	5	10	20	50
$K_0(1+nd)$	1050	1250	1500	2000	3500
$K_0(1+d)^n$	1050	1276	1629	2653	11467

Beispiel 28. Welches Anfangskapital K_0 muss bei nachschüssigem Zinseszins angelegt werden, wenn nach 7 Jahren ein Kapital von 100.000 € vorhanden sein soll und der Zinssatz $0,05$ bzw. $0,06$ beträgt?
Im ersten Fall muss die Gleichung

$$K_7 = 100000 = K_0 \cdot (1 + 0,05)^7$$

nach K_0 aufgelöst werden. Das ergibt ein benötigtes Anfangskapital von

$$K_0 = \frac{100000}{1,05^7} \approx 71068 \text{ €}.$$

Analog ergibt sich im zweiten Fall

$$K_0 = \frac{100000}{1,06^7} \approx 66506 \text{ €}.$$

Die Gewinnung von K_0 aus gegebenem n, d und K_n wird auch als Bestimmung des **Barwertes einer zukünftigen Zahlung** bezeichnet.

Barwertformel der Zinseszinsrechnung:
Der heute zahlbare Betrag K_0, der benötigt wird, um eine in n Zeitperioden fällige Schuld K_n abzulösen, beträgt

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+d)^n} = K_n(1+d)^{-n},$$

wobei d der Zinssatz pro Zeitperiode ist. K_0 heißt **Barwert** des nach n Zeitperioden fälligen Betrags K_n oder auch n-mal **abgezinstes bzw. diskontiertes Kapital** K_n.

Das Abzinsen erlaubt den Vergleich von Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten: eine Zahlung K, fällig zum Zeitpunkt n_0, und eine Zahlung $\widetilde{K}$, fällig zum Zeitpunkt $\tilde{n}_0$, heißen **äquivalent** bzgl. eines Zinssatzes d, wenn gilt

$$\widetilde{K}(1+d)^{-\tilde{n}_0} = K(1+d)^{-n_0}$$

oder, anders geschrieben,

$$\widetilde{K} = K(1+d)^{\tilde{n}_0 - n_0}.$$

Ebenso wie das Anfangskapital K_0 lassen sich auch der Zinssatz d sowie die Anzahl n der Jahre aus den anderen Größen in der Zinseszinsformel ermitteln

$$\boxed{d = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1, \quad n = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln(1+d)} = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+d)}.}$$

Beispiel 29. Sie bringen ein Anfangskapital von 500 € zur Bank und erhalten 8% jährliche nachschüssige Zinseszinsen. Wie lange müssen Sie warten, bis Sie ein Kapital von 900 € besitzen?
Wir berechnen die Anzahl der Jahre durch

$$n = \frac{\ln 900 - \ln 500}{\ln(1,08)} \approx 7,637.$$

Sie müssen also 8 Jahre warten.

(C) Werden die Zinsen dem Kapital auch nach Zeitintervallen gutgeschlagen, die kleiner sind als ein Jahr (oder die dem angegebenen Zinssatz zugrunde liegende Zeiteinheit) und im weiteren mitverzinst, so spricht man von **unterjähriger Verzinsung**.

Beispiel 30. Eine Bank gibt für die Verzinsung eines Kapitals K_0 einen **nominellen** Jahreszinssatz d an. Der Zinszuschlag erfolgt allerdings nicht jährlich, sondern nach jedem Quartal. Dann ergibt sich nach einem Jahr als Kapital

$$K_0 \cdot \left(1 + \frac{d}{4}\right)^4$$

und der **effektive Jahreszins** beträgt $\left(1 + \frac{d}{4}\right)^4 - 1.$
Ist zum Beispiel $K_0 = 1000$ und $d = 0,05$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_0\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^4 \approx 1051 \\
K_2 &= K_1\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^4 = K_0\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^8 \approx 1104 \\
K_3 &= K_2\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^4 = K_0\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^{12} \approx 1161 \\
K_5 &= K_4\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^4 = K_0\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^{20} \approx 1282 \\
K_{10} &= K_9\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^4 = K_0\left(1 + \tfrac{0{,}05}{4}\right)^{40} \approx 1644
\end{aligned}$$

Vergleichen Sie K_5 und K_{10} mit den Erträgen in der Tabelle von Beispiel 27.!

Unterjährige Verzinsung:
Erfolgt bei einem nominellen Jahreszinssatz d an m Zeitpunkten eines Jahres ein nachschüssiger Zinszuschlag, dann beträgt das Kapital nach Ablauf des n-ten Jahres

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Der effektive Jahreszins ist gleich

$$\left(1 + \frac{d}{m}\right)^{m} - 1.$$

Läßt man die Zeitintervalle der Zinszuschläge immer kürzer werden (d. h. $m \to \infty$), so kommt man zur **stetigen Verzinsung**. Der effektive Jahreszins ist dann

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{d}{m}\right)^{m} - 1 = \mathrm{e}^{d} - 1.$$

Die folgende Tabelle gibt den effektiven Zinssatz bei unterjähriger Verzinsung zu verschiedenen Zeitintervallen sowie bei stetiger Verzinsung an. Die nominellen Zinssätze sind 2%, 5% und 10%.

m	2%	5%	10%
2	$2,010$	$5,063$	$10,250$
4	$2,015$	$5,095$	$10,381$
12	$2,018$	$5,116$	$10,471$
365	$2,020$	$5,127$	$10,517$
$(\mathrm{e}^d - 1)\%$	$2,020$	$5,127$	$10,517$

Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^d = \underbrace{1 + d}_{\text{jährliche Verzinsung}} + \underbrace{\frac{d^2}{2!} + \frac{d^3}{3!} + \cdots}_{\text{Zusatz durch stetige Verzinsung}}$$

kann man die verschiedenen Anteile der Verzinsung erkennen.

Rentenrechnung

Unter einer n-maligen **Rente** versteht man eine regelmäßige, in n gleichen Zeitabständen fällige Zahlung, die aus n Teilzahlungen R_j, mit $j = 1, \ldots, n$, besteht, den **Rentenraten**.
Bei der **nachschüssigen Rente** erfolgt die Zahlung R_j am Ende des j-ten Zeitabschnitts, bei der **vorschüssigen Rente** dagegen am Beginn des j-ten Zeitabschnitts.

Im Zusammenhang mit Renten interessiert man sich vor allem für den Gesamtwert, unter Berücksichtigung von Zinseszins, den eine Rente am Anfang bzw. Ende der Rentenzahlungen hat. Hierbei kommt es darauf an, ob die Rente nach- oder vorschüssig gezahlt wird. Denn bei nachschüssiger Zahlung einer n-maligen Rente wird die erste Rentenzahlung nur $n-1$ Jahre verzinst, bei vorschüssiger aber n Jahre. Entsprechendes gilt für die weiteren Zahlungen.

Im folgenden betrachten wir nur den Fall konstanter Rentenzahlungen, also $R_j = R$ für alle j.

Rentenendwertformel bei nach- und vorschüssiger Zahlung:
Bei dem Aufzinsungsfaktor $q = 1 + d$ und der konstanten Rentenzahlung R ergibt sich bei nachschüssiger Zahlung der Gesamtwert

$$K_n = Rq^{n-1} + Rq^{n-2} + Rq^{n-3} + \ldots + R$$
$$= \sum_{k=1}^{n} Rq^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} Rq^k = R\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

und bei vorschüssiger Zahlung

$$K_n = Rq^n + Rq^{n-1} + Rq^{n-2} + \ldots + Rq$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} Rq^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} Rq^k = Rq\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Falls zu Beginn des Zeitraums auch noch ein Anfangskapital K_0 vorliegt (wie oft bei Ratensparverträgen), so ergeben sich als Endwerte bei nach- und vorschüssiger Zahlung

$$K_n = K_0 q^n + R\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$K_n = K_0 q^n + Rq\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Beispiel 31. Sie schließen mit Ihrer Bank einen Ratensparvertrag über 10 Jahre und zu einem Zinsfuß von 6% ab. Zu Beginn des ersten Jahres zahlen Sie einen Einmalbetrag von 1500 € ein und anschließend jeweils am Ende des Jahres eine Rate von 200 €. Welchen Wert hat das Kapital nach 10 Jahren?
Da es sich um nachschüssige Ratenzahlung handelt, ergibt sich als Endwert

$$K_{10} = 1500 \cdot 1,06^{10} + 200 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1} \approx 5322 \text{ €}.$$

Das von Ihnen eingezahlte Kapital beträgt $1500 + 10 \cdot 200 = 3500$ €. Der Rest stammt aus den Zinseszinsen.

Löst man die Rentenendwertformeln (ohne Anfangskapital) nach R auf, so kann man bestimmen, welche jährliche Rate zu zahlen ist, um bei einem Zinsfuß von $p\%$ nach n Jahren ein gewünschtes Kapital zu erhalten. Mit dem Aufzinsungsfaktor $q = 1+d = 1+\frac{p}{100}$ ergeben sich bei nach- und vorschüssiger Zahlung

$$\boxed{R = K_n \frac{q-1}{q^n - 1} \quad \text{und} \quad R = \frac{K_n}{q} \frac{q-1}{q^n - 1}}$$

Tilgungsrechnung

Tilgung, Annuität:
Werden Schulden in Teilbeträgen, den sogenannten **Raten** zurückgezahlt, so spricht man von einer **Tilgung**, bei der die Schulden auf eine Restschuld vermindert werden.
Die in einem Zeitabschnitt vom Schuldner aufzubringende Leistung wird als **Annuität** bezeichnet. Die Annuität A setzt sich aus der Tilgung T und den Zinsen Z für den Zeitabschnitt zusammen: $A = T + Z$.
Eine Zusammenstellung der in den einzelnen Zeitabschnitten zu erbringenden Annuitäten, Zinsen und Tilgungsraten heißt **Tilgungsplan**.
Bei der **Ratentilgung** ist die Tilgungsrate während der gesamten Tilgungsdauer konstant.
Bei der **Annuitätentilgung** erfolgt die Tilgung am Ende jeder Periode so, dass die Annuität über den gesamten Zeitraum konstant bleibt.

Da die Restschuld und damit die Zinsen im Laufe der Zeit sinken, wird bei der Annuitätentilgung von Jahr zu Jahr ein größerer Betrag getilgt.

Soll eine Schuld K_0 in n Jahren mit einer Ratentilgung getilgt werden, so beträgt die **jährliche Tilgungsrate** $T = \dfrac{K_0}{n}$.
Da die zu verzinsende Restschuld von Jahr zu Jahr abnimmt, werden die Annuitäten mit der Zeit geringer.

Beispiel 32. (Ratentilgung) Der Tilgungsplan für eine Schuld $K_0 = 100.000$ (DM oder €) bei 8% Zinsen und einer Laufzeit von 10 Jahren hat folgende Form

Jahr	Tilgungsrate	Zinsen	Annuität	Restschuld
1	10.000	8.000	18.000	90.000
2	10.000	7.200	17.200	80.000
3	10.000	6.400	16.400	70.000
4	10.000	5.600	15.600	60.000
5	10.000	4.800	14.800	50.000
6	10.000	4.000	14.000	40.000
7	10.000	3.200	13.200	30.000
8	10.000	2.400	12.400	20.000
9	10.000	1.600	11.600	10.000
10	10.000	800	10.800	0
	100.000	44.000	144.000	

Wie man an der Tabelle sieht, sind die Belastungen des Schuldners ungleichmäßig über die Tilgungsdauer verteilt.

Ratentilgung:
Sei K_0 die Schuld und T die Tilgungsrate, um die Schuld in n Jahren zu tilgen, also

$$T = \frac{K_0}{n}\,.$$

Bei der Ratentilgung bilden Zinsen, Annuitäten und Restschuld jeweils arithmetische (endliche) Folgen:
Sei d der Zinssatz, K_m die Restschuld am Ende der m-ten Periode, Z_m die zu zahlenden Zinsen für die $(m+1)$-te Periode und A_m die Annuität, also $A_m = T + Z_m$. Dann ist

$$\begin{aligned}
K_m &= K_{m-1} - T, \quad m = 1, \ldots, n \\
Z_0 &= K_0 \cdot d, \\
Z_m &= Z_{m-1} - T \cdot d, \quad m = 1, \ldots, n-1, \\
A_0 &= Z_0 + T, \\
A_m &= A_{m-1} - T \cdot d, \quad m = 1, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Beispiel 33. (Annuitätentilgung) Will man nun in der gleichen Situation wie in Beispiel 32. die Schuld mit der Annuitätentilgung ableisten, so benötigt man diejenige konstante Annuität A, die nach 10 Jahren zur Gesamttilgung der Schuld mit den aufgelaufenen Zinsen führt. Dieser Wert A berechnet sich wie folgt:
In 10 Jahren wird aus der Schuld $K_0 = 100.000$ bei nachschüssigem Zinseszins $K_n = K_0 \cdot 1,08^{10} = 215892,50$. Die Tilgung dieser Gesamtschuld in 10 Jahren kann man sich nun als eine n-malige Rente vorstellen. Daher ist die gesuchte Annuität A gerade diejenige konstante Rentenzahlung, die zu einem Endwert von $215892,50$ führt. Bei nachschüssiger Zahlung muss also die erste Formel auf Seite 250 angewendet werden und liefert

$$A = K_n \frac{q-1}{q^n - 1} = 215892,50 \cdot \frac{0,08}{1,08^{10} - 1} \approx 14902,95.$$

(typischerweise begleicht man nicht gleich bei Aufnahme des Kredits eine Schuld, sondern beginnt nach dem ersten Zeitintervall, daher nachschüssige Zahlung). Damit hat der Tilgungsplan für eine Schuld von $K_0 = 100.000$ (DM oder €) bei 8% Zinsen und einer Laufzeit von 10 Jahren die Form

Jahr	Tilgung	Zinsen	Annuität	Restschuld
1	$6.902,95$	$8.000,00$	$14.902,95$	$93.097,05$
2	$7.455,19$	$7.447,76$	$14.902,95$	$85.641,86$
3	$8.051,60$	$6.851,35$	$14.902,95$	$77.590,26$
4	$8.695,73$	$6.207,22$	$14.902,95$	$68.894,53$
5	$9.391,39$	$5.511,56$	$14.902,95$	$59.503,19$
6	$10.142,70$	$4.760,25$	$14.902,95$	$49.360,45$
7	$10.954,11$	$3.948,84$	$14.902,95$	$38.406,33$
8	$11.830,44$	$3.072,51$	$14.902,95$	$26.575,89$
9	$12.776,88$	$2.126,07$	$14.902,95$	$13.799,02$
10	$13.799,02$	$1.103,93$	$14.902,95$	$0,00$
	100.000	$49.029,50$	$149.029,50$	

Annuitätentilgung:
Sei K_0 die Schuld, d der jährliche Zinssatz, $q = 1 + d$ der Aufzinsungsfaktor, und sei A die konstante Annuität, die erforderlich ist, um die Schuld nach n Jahren zu tilgen. Dann ist

$$K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Bei der Annuitätentilgung bildet die Tilgung eine geometrische (endliche) Folge.
Sei K_m die Restschuld am Ende der m-ten Periode, Z_m die zu zahlenden Zinsen für die $(m+1)$-te Periode und T_m die zu zahlende Tilgungsrate für die $(m+1)$-te Periode. Dann gilt

$$\begin{aligned}
K_m &= K_0 \cdot q^m - A \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}, \quad m = 1, \ldots, n \\
Z_0 &= K_0 \cdot (q - 1) \\
Z_m &= Z_{m-1} \cdot q - A \cdot (q - 1), \quad m = 1, \ldots, n - 1 \\
T_0 &= A - K_0 \cdot (q - 1) \\
T_m &= T_{m-1} \cdot q, \quad m = 1, \ldots, n - 1
\end{aligned}$$

Beispiel 34. Statt die Situation eines Schuldners und seiner Bank zu betrachten, können die Rollen auch vertauscht werden, d.h. wir behandeln nun folgende Situation:

Sei K_0 ein Anfangskapital, das zu Beginn eines Jahres eingezahlt und mit dem jährlichen Zinssatz d verzinst wird. Innerhalb eines Jahres vermehrt sich das Kapital um den Aufzinsungsfaktor $q = 1 + d$. Am Ende jeden Jahres wird dem Kapital ein fester Betrag R entnommen (die "Rente"). Dieser Betrag R entspricht der konstanten Annuität in der Situation der Annuitätentilgung.

Wie groß ist dann das Kapital nach n Jahren? Die Formel aus dem obigen Satz liefert unmittelbar die Antwort; dies ist die sogenannte **Sparkassenformel** für den Kapitalabbau durch Auszahlung einer festen Rente bei einem Zinssatz d:

$$
\begin{aligned}
K_n &= K_0 q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
&= K_0 (1 + d)^n - R \cdot \frac{(1 + d)^n - 1}{d}
\end{aligned}
$$