

Kapitel 4. Lineare Algebra

4.1 Einführung

Die lineare Algebra ist für die Wirtschaftswissenschaften von zentraler Bedeutung. Einerseits liefert sie die theoretischen und praktischen Grundlagen für das Lösen linearer Gleichungssysteme. Ferner lassen sich viele ökonomische Phänomene durch sogenannte lineare Modelle beschreiben.

Beispiel 1. Wir nehmen an, auf dem Markt werden zwei Produkte angeboten, z.B. Wein und Bier. Mit D_w bezeichnen wir die Nachfrage nach Wein, D_b ist die Nachfrage nach Bier (D : demand). Ferner sei S_w und S_b das Angebot an Wein und Bier (S : supply). Wir wollen $D_w = S_w$ sowie $D_b = S_b$ erreichen. Man (besser gesagt, der Markt) erreicht dieses Gleichgewicht durch eine Anpassung der Preise P_w und P_b . Wir nehmen an, dass sich Angebot und Nachfrage angesichts der Preise P_w und P_b wie folgt verhalten:

$$D_w = a_0 + a_w P_w + a_b P_b$$

$$S_w = b_0 + b_w P_w + b_b P_b$$

$$D_b = \alpha_0 + \alpha_w P_w + \alpha_b P_b$$

$$S_b = \beta_0 + \beta_w P_w + \beta_b P_b.$$

Angebot und Nachfrage von Wein (bzw. Bier) wird also nicht nur über den Preis von Wein (bzw. Bier) gesteuert: Der Preis von Wein beeinflusst auch den Preis von Bier: Stellen Sie sich vor, der Weinpreis steigt. Dann steigt die Nachfrage nach Bier (sofern das Volk eine gewisse Menge Alkohol benötigt), was den Bierpreis beeinflusst.

Ähnlich hat ein sinkender Bierpreis eine Verringerung des Angebots an Bier zur Folge, deshalb auch eine erhöhte Nachfrage nach Wein. Wir wollen nun die Preise bestimmen, bei denen ein Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage herrscht, also

$$\begin{aligned}(a_0 - b_0) + (a_w - b_w)P_w + (a_b - b_b)P_b &= 0 \\ (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_w - \beta_w)P_w + (\alpha_b - \beta_b)P_b &= 0\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(a_w - b_w)P_w + (a_b - b_b)P_b &= b_0 - a_0 \\ (\alpha_w - \beta_w)P_w + (\alpha_b - \beta_b)P_b &= \beta_0 - \alpha_0.\end{aligned}$$

Wir haben hier ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten (P_b und P_w).

Allgemein ist ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten (Variablen)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & d_1 \\
 a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & d_2 \\
 \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\
 a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & d_m
 \end{array} \quad (10)$$

Die Information über das Gleichungssystem ist in dem Rechteckschema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

enthalten. Wir nennen \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix und \mathbf{d} einen Vektor der Länge m oder einen m -Vektor. Man schreibt manchmal auch

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}.$$

Einen m -Vektor kann man auch als $m \times 1$ -Matrix auffassen.

Wir definieren den m -dimensionalen reellen Vektorraum wie folgt:

$$\mathbb{R}^m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \right\}$$

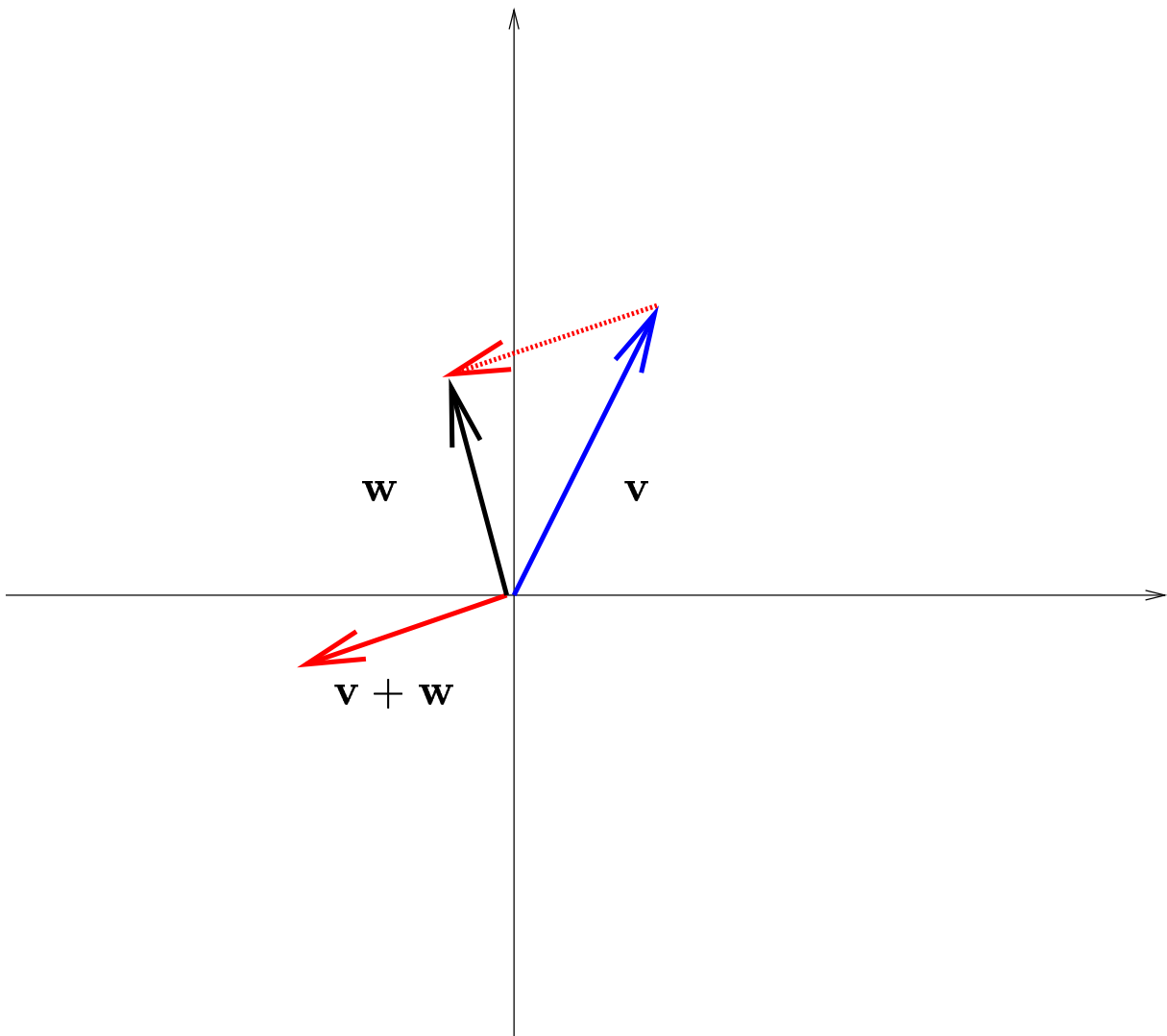
d.h. \mathbb{R}^m besteht aus allen reellen m -Vektoren. Im Fall $m = 3$ können wir uns das gut als den “normalen” dreidimensionalen Raum vorstellen. Wir fixieren einen

Ursprung, den wir mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ identifizieren.

Ferner fixieren wir drei orthogonale Richtungen (x , y und

z -Richtung). Den Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ identifizieren wir mit

dem Pfeil, den wir erhalten, wenn wir vom Ursprung aus a Einheiten in x -Richtung, dann b Einheiten in y -Richtung und schließlich c Einheiten in z -Richtung gehen. Addition von Vektoren bedeutet dann einfach aneinandersetzen von Pfeilen:



Der Abstand zwischen zwei Punkten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Entsprechend definieren wir auch den Abstand zwischen

Punkten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

in \mathbb{R}^m als

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}.$$

4.2 Operationen mit Vektoren und Matrizen

Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen über \mathbb{R} wird stets mit $\mathbb{R}^{(m,n)}$ bezeichnet. Zunächst einmal halten wir fest, wann zwei Matrizen gleich sein sollen:

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, also beide Matrizen haben m Zeilen und n Spalten. Dann heißen \mathbf{A} und \mathbf{B} gleich, wenn sie komponentenweise gleich sind, d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ genau dann, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Entsprechend heißen zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ gleich, wenn sie komponentenweise gleich sind.

Wir sehen, dass Matrizen im Zusammenhang mit Gleichungssystemen auftreten. Bevor wir uns dem Lösen von Gleichungssystemen widmen, wollen wir uns die "Algebra" der Matrizen ein wenig anschauen.

Spezielle Matrizen

Ist \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix, so hat \mathbf{A} m Zeilen und n Spalten. Eine Matrix mit $m = n$ heißt **quadratisch**. Ist $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ quadratisch, so heißen die Einträge $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ die **Diagonaleinträge** von \mathbf{A} .

Beispiel 2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$$

ist eine quadratische 3×3 -Matrix mit den Diagonalelementen 2, 9, 64.

- (i) Eine $m \times n$ -Matrix, deren Komponenten sämtlich Null sind, heißt *Nullmatrix* und wird mit $\mathbf{0}$ bezeichnet, also

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist $n = 1$, so heißt der entsprechende Vektor *Nullvektor*, also

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Eine $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} , deren sämtliche **Nicht-Diagonalelemente**, also die Einträge a_{ij} mit $i \neq j$,

gleich Null sind, heißt *Diagonalmatrix*. Die Matrix hat also die Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{a}_{n-1\ n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir auch $\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{22}, \dots, \mathbf{a}_{nn})$.

- (iii) Die $n \times n$ -Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind, heißt *Einheitsmatrix* (n -ter Ordnung) und wird mit \mathbf{I}_n bezeichnet, also

$$\mathbf{I}_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten der Einheitsmatrix sind die *Einheitsvektoren* in \mathbb{R}^n . Der i -te Einheitsvektor \mathbf{e}_i ist der Vektor, dessen i -te Komponente 1 ist und

dessen andere Komponenten alle 0 sind. Also

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Eintrag 1 in der i -ten Zeile.

- (iv) Eine quadratische Matrix, deren sämtliche Komponenten oberhalb (bzw. unterhalb) der Diagonalen gleich Null sind, heißt *untere* (bzw. *obere*) *Dreiecksmatrix*. Also hat eine untere Dreiecksmatrix die Gestalt (**L**: lower)

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_{n-1 1} & l_{n-1 2} & \cdots & l_{n-1 n-1} & 0 \\ l_{n 1} & l_{n 2} & \cdots & l_{n n-1} & l_{n n} \end{pmatrix}$$

bzw. eine obere Dreiecksmatrix die Gestalt (**U**: upper)

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1\ n-1} & u_{n\ n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2\ n-1} & u_{2\ n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{n-1\ n-1} & u_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n\ n} \end{pmatrix}.$$

Eine nicht notwendig quadratische Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ heißt obere Dreiecksmatrix wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt.

Nachdem wir nun einige spezielle Matrizen eingeführt haben, wollen wir einige Operationen auf der Menge der Matrizen erklären.

Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix. Durch Vertauschen der Zeilen und Spalten von \mathbf{A} erhalten wir eine $n \times m$ -Matrix \mathbf{A}^\top (Sprechweise: A transponiert), die sogenannte *transponierte Matrix* zu \mathbf{A} .

$$\text{Für } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{ist } \mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es ist $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$.

Beispiel 3. Für die 3×4 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & \frac{1}{2} & -10 \end{pmatrix}$$

ist \mathbf{A}^\top die 4×3 -Matrix mit

$$\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Symmetrische Matrizen

Eine quadratische Matrix \mathbf{A} heißt *symmetrisch*, falls $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.

Für eine symmetrische Matrix \mathbf{A} gilt also $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j .

Schiefsymmetrische Matrizen

Eine quadratische Matrix \mathbf{A} heißt *schiefsymmetrisch*, falls $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Für eine schiefsymmetrische Matrix \mathbf{A} gilt also $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle i, j ; insbesondere ist $a_{ii} = 0$ für alle i .

Beispiel 4. Die Matrix \mathbf{A} ist symmetrisch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & -4 & 7 \\ -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix \mathbf{B} ist schiefsymmetrisch:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir kommen nun zur **Addition** von Matrizen. Weil Vektoren spezielle Matrizen sind, gelten dieselben Regeln auch für Vektoren.

Addition

Zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ werden addiert, indem komponentenweise addiert wird, d.h. für $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ist die Differenzmatrix $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ durch komponentenweise Subtraktion definiert. Es werden **nur** Matrizen mit gleicher Anzahl von Zeilen und Spalten addiert oder subtrahiert.

Insbesondere werden zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ addiert bzw. subtrahiert, indem sie koordinatenweise addiert bzw. subtrahiert werden, d.h.

$$\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit einem Skalar

Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Matrix \mathbf{A} wird mit dem *Skalar* λ multipliziert, indem jede Komponente von \mathbf{A} mit λ multipliziert wird, d.h. für $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ist

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend wird ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem jede Koordinate von \mathbf{x} mit λ multipliziert wird, d.h.

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Im folgenden fassen wir einige Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen zusammen:

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ $m \times n$ -Matrizen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare.

Kommutativgesetz: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

Assoziativgesetze: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

$$(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$$

Distributivgesetze: $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$$

Spezialisierung auf Vektoren liefert dieselben Rechengesetze für Vektoren, d.h. für $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

Kommutativgesetz: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

Assoziativgesetze: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

$$(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$$

Distributivgesetze: $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}.$$

Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ läßt sich mit Hilfe von Einheitsvektoren zerlegen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

Wir sagen auch, dass \mathbf{x} eine Linearkombination von $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ist. Dazu später mehr.

Die Operation des Transponierens ist mit den hier erklärten Rechenoperationen (Addition und Multiplikation mit einem Skalar) verträglich:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top \quad \text{und} \quad (\lambda \mathbf{A})^\top = \lambda \mathbf{A}^\top.$$

Es gibt kein Produkt von m -Vektoren, das wieder einen m -Vektor liefert. Man kann aber sehr wohl ein **Skalarprodukt** von Vektoren definieren, d.h. das Produkt zweier reeller m -Vektoren ist eine reelle Zahl:

Skalarprodukt

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt die reelle Zahl

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

das *Skalarprodukt* der Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} .

Wir fassen im folgenden einige Eigenschaften des Skalarproduktes zusammen:

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$[S1] \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

$$[S2] \quad \langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \cdot \mathbf{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

$$[S3] \quad \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

$$[S4] \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

$$[S5] \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

$$[S6] \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$[S7] \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

$$[S8] \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|.$$

Im \mathbb{R}^3 hat das Skalarprodukt eine schöne Interpretation. Wenn wir wieder drei orthogonale Richtungen (x , y und z -Richtung) auszeichnen und der Vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ den

Pfeil vom Ursprung zum Punkt $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ bezeichnet

(analog für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$), so gilt

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \cos(\alpha) \cdot \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}$$

wobei α der Winkel zwischen den Pfeilen ist, die zu \mathbf{a} und \mathbf{b} gehören. Ist \mathbf{v} ein beliebiger Vektor, so ist der Skalar $\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ die Länge des Pfeiles vom Ursprung zum Punkt \mathbf{v} oder, anders gesagt, der Abstand von \mathbf{v} zum Ursprung. Für Vektoren der Länge 1 ist also das Skalarprodukt der Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren. Insbesondere bedeutet Skalarprodukt 0, dass die Pfeile senkrecht aufeinander stehen.

Multiplikation von Matrizen

Wir betrachten zur Motivation der Matrizenmultiplikation das Beispiel 17.6.1 aus SCHWARZE, Seite 24, Band 3.

Beispiel 5. In einem Chemiewerk werden Steinkohle (x_1) und Braunkohle (x_2) durch Hydrierung zu leichtflüssigen (y_1) und gasförmigen (y_2) Kohlenwasserstoffen verarbeitet. Dabei erhält man aus einer Tonne Steinkohle $a_{11} = 0,5$ Tonnen leichtflüssigen und $a_{21} = 0,2$ Tonnen gasförmigen Kohlenwasserstoff. Bei Braunkohle sind die entsprechenden Zahlen $a_{12} =$

0,4 und $a_{22} = 0,3$. Wir speichern diese Zahlen in einer Input-Output-Matrix \mathbf{A} wie folgt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Wenn wir einen Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ haben, der angibt, wieviel Tonnen Stein- und wieviel Tonnen Braunkohle in dem Werk angeliefert werden, so beschreibt der Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

wieviel leichtflüssigen und wieviel gasförmigen Kohlenwasserstoff (Output) man mit diesem Input produzieren kann.

Stellen Sie sich nun vor, dass die Kohlenwasserstoffe zu Paraffin (z_1), Schmieröl (z_2) und Dieselöl (z_3) weiterverarbeitet werden. Hier gelten folgende Beziehungen: Aus einer Tonne leichtflüssigem Kohlenwasserstoff können Sie 0,3 Tonnen Paraffin, 0,4 Tonnen Schmieröl und 0,2 Tonnen Dieselöl produzieren, bei gasförmigem Kohlenwasserstoff sind die entsprechenden Zahlen 0,2, 0,3 und 0,4. Die Input-

Output-Matrix ist nun

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Wenn das Chemiewerk y_1 Tonnen leichtflüssigen und y_2 Tonnen gasförmigen Kohlenwasserstoff zur Verfügung hat, so können daraus

$$z_1 = 0,3y_1 + 0,2y_2 \text{ Tonnen Paraffin}$$

$$z_2 = 0,4y_1 + 0,3y_2 \text{ Tonnen Schmieröl}$$

$$z_3 = 0,2y_1 + 0,4y_2 \text{ Tonnen Dieselöl}$$

produziert werden. Wie sieht es aus, wenn wir direkt aus dem Input x_1 und x_2 den Output z_1 , z_2 und z_3 bestimmen wollen? Die Input-Output-Matrix hat die Größe 3×2 und sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} \end{pmatrix}$$

Numerisch erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0,19 & 0,18 \\ 0,26 & 0,25 \\ 0,18 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist das Matrixprodukt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, wenn man die Multiplikation von Matrizen wie folgt erklärt:

Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix, und sei \mathbf{B} eine $n \times k$ -Matrix (*beachte: die Anzahl der Spalten von \mathbf{A} muß gleich der Anzahl der Zeilen von \mathbf{B} sein!*). Dann ist das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ der beiden Matrizen definiert als die $m \times k$ -Matrix \mathbf{C} , deren Komponente c_{ij} das Skalarprodukt aus i -ter Zeile von \mathbf{A} und j -ter Spalte von \mathbf{B} ist, also

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{in} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{1j} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{nj} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir können das Skalarprodukt als ein spezielles Matrixprodukt auffassen. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren. Dann ist \mathbf{a}^T eine $1 \times n$ -Matrix und \mathbf{b} eine $n \times 1$ Matrix. Somit existiert das Matrixprodukt $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$,

und es gilt

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j \mathbf{b}_j = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Beispiel 6. Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -15 & 18 & 14 \\ 3 & 15 & -9 & 18 \\ 0 & 12 & -9 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bevor wir einige Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation zusammenstellen, einige wichtige Bemerkungen:

Auch wenn für zwei Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} beide Produkte definiert sind, gilt i.a.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Falls $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gilt, dann heißen \mathbf{A} und \mathbf{B} *vertauschbar*.

Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix, und seien \mathbf{I}_n , \mathbf{I}_m die Einheitsmatrizen, dann gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{A} = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A}.$$

Außerdem gilt für die Multiplikation mit Nullmatrizen:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} .$$

Ferner gilt

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top.$$

Rechenregeln für Matrizen

In den folgenden Summen und Produkten seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ Matrizen, so dass die entsprechenden Summen und Produkte auch existieren. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar.

Assoziativgesetze: $(\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{C}) = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}$
 $\lambda (\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\lambda \mathbf{A}) \mathbf{B} = \mathbf{A} (\lambda \mathbf{B})$

Distributivgesetze: $\mathbf{A} (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{C}$
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} + \mathbf{B} \mathbf{C}$