

4.3 Lösungen linearer Gleichungssysteme

Viele Anwendungsprobleme führen auf die Untersuchung von Matrix-Vektor-Produkten in der folgenden Form.

Seien \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit den Koordinaten x_i , $1 \leq i \leq n$.

Dann existiert das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ und es ist

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Oft ist dabei die Matrix \mathbf{A} und das Ergebnis $\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ vorgegeben und der Vektor \mathbf{x} zu bestimmen. In diesem

Abschnitt wollen wir Verfahren kennenlernen, wie wir solche Gleichungssysteme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (11)$$

lösen können.

Beispiel 7. Wir betrachten das Beispiel 5. auf Seite 277. Wieviel Steinkohle und Braunkohle muss das Chemiewerk bestellen, um

2 Tonnen Paraffin

2,7 Tonnen Steinkohle

1,6 Tonnen Dieselöl

zu produzieren. Dazu müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0,3 y_1 + 0,2 y_2 &= 2 \\ 0,4 y_1 + 0,3 y_2 &= 2,7 \\ 0,2 y_1 + 0,4 y_2 &= 1,6 \end{aligned} \quad (12)$$

lösen. Wir können stattdessen auch

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &= 8 \\ 3y_1 + 2y_2 &= 20 \\ 4y_1 + 3y_2 &= 27 \end{aligned} \quad (13)$$

lösen. Wir haben hier einfach die dritte Gleichung zur ersten Gleichung gemacht und mit 5 multipliziert. Die

anderen beiden Gleichungen sind mit 10 multipliziert worden. Die Systeme (12) und (13) haben identische Lösungsmengen. Man bezeichnet sie häufig auch als äquivalent.

Wir nutzen nun die erste Gleichung, um y_1 aus den anderen Gleichungen zu eliminieren:

$$\begin{array}{rclcl} y_1 & + & 2y_2 & = & 8 \\ & - & 4y_2 & = & -4 \\ & - & 5y_2 & = & -5 \end{array}$$

Wir erhalten $y_2 = 1$ und $y_1 = 6$.

Sie haben hiermit schon die wesentliche Idee gesehen, wie man lineare Gleichungssysteme löst: Man versucht, ein gegebenes und möglicherweise recht unübersichtliches System in ein äquivalentes, übersichtliches System umzuformen, dem man die Lösungen dann "ansieht".

Beispiel 8. Was passiert in unserem Beispiel, wenn nun 2 Tonnen Dieselöl statt nur 1,6 Tonnen zu produzieren

sind. Wir formen wieder um:

$$\begin{array}{rcl} 0,3 y_1 & + & 0,2 y_2 = 2 \\ 0,4 y_1 & + & 0,3 y_2 = 2,7 \\ 0,2 y_1 & + & 0,4 y_2 = 2 \\ \\ y_1 & + & 2y_2 = 10 \\ & - & 4y_2 = -10 \\ & - & 5y_2 = -13 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht lösbar! Nun kann das Chemiewerk natürlich dem Kunden nicht sagen, es könne nicht liefern, nur weil ein Gleichungssystem nicht lösbar ist. Was tun? Wir nehmen an, Steinkohle ist 1,5-mal so teuer wie Braunkohle. Der Preis pro Tonne Braunkohle sei 1, der von Steinkohle 1,5 (gemessen in einer imaginären Einheit). Für das Chemiewerk ergibt sich nun das Problem, den Auftrag mit möglichst wenig Kosten zu erledigen. Wir erhalten das Problem

minimiere $y_1 + 1,5 y_2$

unter den **Nebenbedingungen**

$$\begin{aligned} 0,3 y_1 + 0,2 y_2 &\geq 2 \\ 0,4 y_1 + 0,3 y_2 &\geq 2,7 \\ 0,2 y_1 + 0,4 y_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Solche Probleme löst man mit dem **Simplexverfahren**, das Sie in anderen Vorlesungen kennenlernen. Sie werden keine Probleme haben, dieses für die gesamte Ökonomie wichtige Verfahren zu verstehen, wenn Sie gut verstanden haben, wie man mit linearen Gleichungssystemen umgeht.

In unserem Beispiel ist die Lösung übrigens $y_1 = 5$ und $y_2 = 2,5$. Es wird also etwas zu viel Schmieröl produziert (2,75 Tonnen statt der erforderlichen 2,7 Tonnen).

Noch einmal zur Klarstellung: Das Simplexverfahren ist nicht Thema dieser Vorlesung. Grundlage für das Simplexverfahren sind aber die im folgenden erläuterten Umformungen.

Zunächst einige Bezeichnungen: Das Gleichungssystem (11) heißt **homogen**, falls $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ist, andernfalls

inhomogen. Wir nennen das Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ das zu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ gehörende homogene Gleichungssystem. Sei \mathbf{v} **eine** Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Wenn

$$L_h = \{\mathbf{x} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist und

$$L_i = \{\mathbf{x} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\},$$

so gilt

$$L_i = L_h + \mathbf{v}$$

wobei $L_h + \mathbf{v}$ die Menge $\{\mathbf{x} + \mathbf{v} : \mathbf{x} \in L_h\}$ bezeichnet. Mit anderen Worten: Die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems erhält man, indem man eine spezielle Lösung \mathbf{v} bestimmt und dazu die Lösungen des homogenen Systems addiert.

Lösung des homogenen Systems

Wir formen die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ in der homogenen Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

mit Hilfe folgender sogenannter elementarer Zeilenumformungen um. Erlaubt sind

- Vertauschen von Zeilen
- Addition des λ -fachen von Zeile i zu Zeile j
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$.

Man kann sich leicht überlegen, dass man die Matrix \mathbf{A} so in eine obere Dreiecksmatrix \mathbf{A}' transformieren kann, also

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & \cdots & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei sollen die ersten r Zeilen jeweils mindestens einen Eintrag $\neq 0$ haben. Man kann auch erreichen, dass in den ersten r Zeilen der erste (von links gesehen) Eintrag, z.B. a_{ij_i} gerade 1 ist. Beachte, dass j von i abhängt

(und nicht unbedingt $j = i$ gilt), deshalb schreiben wir j_i . Wir fordern noch $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Ferner kann man erreichen, dass die Spalten j_1, j_2, \dots, j_r Einheitsvektoren sind. Wir können also die Form erreichen, die auf dem Zusatzblatt Z2 angegeben ist.

Wo auf dem Blatt Z1 nichts steht, soll eine Null stehen, insbesondere können noch einige Nullzeilen vorhanden sein. Es können auch einige Nullen vor der ersten 1 in der ersten Zeile stehen (das bedeutet dann $j_1 \neq 1$).

Um die Lösungen linearer Gleichungssysteme zu bestimmen, ist es aber nur wichtig ist, dass man \mathbf{A} in eine obere Dreiecksmatrix transformiert mit $j_1 < j_2 < \dots < j_r$, dass man also die auf Z1 angegebene Form erreicht.

Es gilt nun:

Satz 1 Die Lösungsmenge von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist gleich der Lösungsmenge von $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dieser Satz ist von grundlegender Bedeutung für das Lösen von linearen Gleichungssystemen, weil Gleichungssysteme, deren Koeffizientenmatrix obere Dreiecksform hat, ganz einfach lösbar sind.

Die hier auftretende Zahl r heißt der **Rang** der Matrix. Die folgenden Beispiele zeigen, dass das zugehörige

Gleichungssystem dann $n - r$ "Freiheitsgrade" hat, d.h. man kann $n - r$ Variable frei wählen, die anderen sind dann bestimmt.

Beispiel 9. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Wir haben hier zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Wir setzen $x_3 = a$. Dann ist $x_2 = -a$. Setzen wir nun diese Information in die erste Gleichung ein, so bekommen wir

$$3x_1 - 2a - a = 0,$$

also $x_1 = a$. Der Lösungsraum L ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir sagen, der Lösungsraum hat einen Freiheitsgrad; man kann eine Variable frei wählen.

Das Gleichungssystem in obigem Beispiel war einfach

lösbar, weil die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksform hat. Im allgemeinen sind die Gleichungssysteme natürlich nicht in oberer Dreiecksform gegeben; wir müssen sie erst mittels elementarer Zeilenumformungen umformen:

Beispiel 10. Wir wollen das homogene lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ lösen mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Wir dividieren nun die erste Zeile durch 2 und ziehen die so entstandene Zeile von der zweiten und dritten Zeile ab. Das liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 3/2 & -5 \\ 0 & -3/2 & 5 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir die dritte Zeile eliminieren, indem wir die zweite Zeile zur dritten dazuaddieren. Ferner

multiplizieren wir die zweite Zeile mit $2/3$ und erhalten so

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 1 & -10/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir noch die zweite Zeile $1/2$ -mal zur ersten addieren und bekommen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -10/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems sofort ablesbar:

$$x_3 = a, \quad x_2 = \frac{10}{3}a, \quad x_1 = -\frac{4}{3}a$$

oder

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -(4/3)a \\ (10/3)a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -4b \\ 10b \\ 3b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

Auch hier haben wir wieder einen Freiheitsgrad.

Wenn wir keinen Freiheitsgrad haben, so hat das homogene Gleichungssystem nur die Lösung 0 .

Wir halten fest:

Ein homogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit m Gleichungen und n Unbestimmten hat immer mindestens die Lösung $\mathbf{0}$. Ist r der Rang von \mathbf{A} , so hat das System $n - r$ Freiheitsgrade. Insbesondere gilt: Ist $m < n$, so hat das System mehr als nur die Lösung $\mathbf{0}$, weil dann $r \leq m < n$ ist.

Das inhomogene System

Wir haben bereits ein Beispiel gesehen, wie man mit denselben Umformungen wie im Fall homogener Systeme auch inhomogene Systeme umformen kann (Beispiel 7.). Man muss einfach nur den Vektor \mathbf{b} entsprechend mit umformen.

Etwas formaler: Die Gleichungssysteme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

und

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$$

haben dieselbe Lösungsmenge, sofern die **erweiterte** Matrix

$$(\mathbf{A}' | \mathbf{b}')$$

aus

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b})$$

durch elementare Zeilenumformungen hervorgegangen ist.

Die Strategie ist also wieder klar: Versuche, die Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ in obere Dreiecksform zu bringen. Wie wir schon gesehen haben, kann es passieren, dass das inhomogene System gar keine Lösung hat.

Wir wollen das hier wieder an einer Reihe von Beispielen illustrieren. Wir geben nicht immer an, wie wir die einzelnen Matrizen umgeformt haben.

Beispiel 11. Es ist

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ 6,7 \\ 7,2 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Die erweiterte Matrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2,6 \\ 5 & 2 & 4 & 6,7 \\ 5 & 2 & 6 & 7,2 \end{array} \right)$$

und wird wie folgt transformiert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2,6 \\ 5 & 2 & 4 & 6,7 \\ 0 & 0 & 2 & 0,5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0 & 1,3 \\ 0 & -0,5 & 4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 2 & 0,5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0 & 1,3 \\ 0 & -0,5 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0,25 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 1,6 \\ 0 & 0 & 1 & 0,25 \end{array} \right)$$

Die Lösung ist nun

$$x_1 = 0,5, \quad x_2 = 1,6, \quad x_3 = 0,25.$$

Wir haben also genau eine Lösung. Es sollte klar sein, dass Sie bei dieser Matrix **A** Ihren Vektor **b** beliebig wählen können und in jedem Fall genau eine Lösung bekommen.

Beispiel 12. Wir betrachten jetzt ein anderes Beispiel, bei dem es mehr als eine Lösung gibt. Die erweiterte Matrix sei

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 8 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 8 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 3 & 5 \\ 0 & 3/2 & -5 & -1 \\ 0 & -3/2 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -10/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & -10/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Wir können hier wieder $x_3 = a$ frei wählen, dann ist

$$\begin{aligned}x_2 &= -\frac{2}{3} + \frac{10}{3}a \\x_1 &= \frac{14}{3} - \frac{4}{3}a \\x_3 &= a\end{aligned}$$

Anders gesagt:

$$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sie erkennen unschwer, dass

$$\left\{ a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ist und dass

$$\begin{pmatrix} 14 \\ \frac{3}{3} \\ 2 \\ -\frac{3}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems. Wir haben hier also genau die auf Seite 289 beschriebene Situation, dass man die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems erhält, indem man zu den Lösungen des homogenen Systems eine **spezielle** Lösung des inhomogenen Systems addiert.

In diesem Beispiel hängt die Tatsache, dass es überhaupt Lösungen gibt, von \mathbf{b} ab. Hätten wir als rechte Seite

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gewählt, so hätten wir in \mathbf{A} durch Umformungen die Nullzeile erhalten, auf der rechten Seite hätte dann aber eine Zahl $\neq 0$ gestanden. So etwas ist offenbar nicht lösbar.

Wir halten fest:

Wenn das inhomogene System $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit m Gleichungen und n Unbestimmten eine Lösung hat, **dann** hat es $n - r$ Freiheitsgrade, wobei r der Rang der Matrix \mathbf{A} ist.

WARNUNG: Es kann passieren, dass das inhomogene System $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat, selbst wenn es weniger Gleichungen als Unbestimmte gibt.

Ganz banales Beispiel: Die beiden Gleichungen $x + y + z = 3$ und $2x + 2y + 2z = 3$ widersprechen sich, es gibt also keine Lösung des inhomogenen Systems mit 2 Gleichungen und 3 Unbestimmten, obwohl $n - r = 3 - 1 = 2$ ist (der Rang der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} ist hier 1). Wenn es eine Lösung gegeben hätte, dann zeigt unser Satz, dass es dann gleich ganz viele (2 Freiheitsgrade) Lösungen gegeben hätte.

Beispiel 13. Wir betrachten das (erweiterte) System

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 2 & -2 & 12 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Dieses System hat mindestens einen Freiheitsgrad. Wenn es überhaupt eine Lösung gibt, dann muss diese Lösung also mindestens einen Freiheitsgrad haben. Aber Achtung: Nur **wenn** es eine Lösung gibt.

Wir beginnen unsere Umformungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 11 & 10 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 9 & -6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -9 & 6 \\ 0 & 5 & 11 & 10 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 31 & 55 & -24 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 55/31 & -24/31 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -59/31 & 90/31 \\ 0 & 0 & 1 & 55/31 & -24/31 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 41/31 & -10/31 \\ 0 & 1 & 0 & -59/31 & 90/31 \\ 0 & 0 & 1 & 55/31 & -24/31 \end{array} \right)$$

Das inhomogene System ist hier in der Tat lösbar: Eine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} -10/31 \\ 90/31 \\ -24/31 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$a \cdot \begin{pmatrix} -41/31 \\ 59/31 \\ -55/31 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also ist die Lösungsmenge L_i des inhomogenen Systems

$$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{10}{31} \\ \frac{90}{31} \\ -\frac{24}{31} \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{41}{31} \\ \frac{59}{31} \\ -\frac{55}{31} \\ 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

Wie können wir garantieren, dass das inhomogene System eine Lösung hat? Hier, in diesem Beispiel, ging das gut, weil \mathbf{A} vollen Rang hat, nämlich 3. Unsere elementaren Zeilenumformungen können also keine Nullzeile liefern, so dass auf der rechten Seite gleichzeitig ein Wert $\neq 0$ steht. Wie sieht es aber für Matrizen aus, die nicht vollen Rang haben.

Es gilt

Satz 2 Das inhomogene Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat eine Lösung genau dann, wenn der Rang von \mathbf{A} gleich dem Rang der erweiterten Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ ist.

Im obigen Beispiel ist 3 der Rang sowohl von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,4)}$ als auch von $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{(3,5)}$. Beachten Sie, dass der

Rang von $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ nicht kleiner dem Rang von \mathbf{A} sein kann. Wenn also $m \leq n$ gilt, das System also nicht überbestimmt ist, so ist das inhomogene System auf jeden Fall dann lösbar, wenn der Rang von \mathbf{A} gerade m ist. Ist der Rang von \mathbf{A} kleiner als m , können verschiedene Dinge passieren:

Beispiel 14.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Hier ist der Rang von \mathbf{A} gleich dem Rang von $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, nämlich 2, und eine spezielle Lösung des inhomogenen

Systems ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist

$$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}b + a \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}b - 2a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right.$$

Die freie Wahl von a und b zeigt die zwei Freiheitsgrade ($2 = \text{Anzahl Variable} - \text{Rang}(\mathbf{A})$).

Ist hier aber beispielsweise

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Dieses System ist offenbar nicht lösbar, und es gilt ja auch

$$\text{Rang}(\mathbf{A}) = 2 \neq \text{Rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3.$$

Beispiel 15. Hier ist ein weiteres Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Der Lösungsraum ist

$$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - 2a - 3b \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

Hier ist $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$ und $x_4 = 1$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, und

$$L_h = \left\{ \begin{pmatrix} -2a - 3b \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

die allgemeine Lösung des homogenen Systems. Wieder ist

$$L_i = L_h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Basis, Lineare Abhängigkeit

Wir betrachten noch einmal das Kriterium zur Lösbarkeit des inhomogenen Systems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Die Spalten von A bezeichnen wir mit $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Wenn das System lösbar ist, dann gibt es reelle Zahlen x_1, \dots, x_n so, dass

$$\mathbf{a}_1 \cdot x_1 + \mathbf{a}_2 \cdot x_2 + \dots + \mathbf{a}_n \cdot x_n = \mathbf{b}.$$

Dabei sind $\mathbf{a}_i, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Wir sagen auch: \mathbf{b} ist eine **Linearkombination** der \mathbf{a}_i . Genauer:

Seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ Vektoren in \mathbb{R}^m . Dann heisst ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \cdot x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

eine **Linearkombination** der \mathbf{a}_i .

Der Vektor $\mathbf{0}$ lässt sich stets als Linearkombination der \mathbf{a}_i schreiben, nämlich

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \cdot 0$$

Wir nennen die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ **linear abhängig**, wenn es eine weitere Linearkombination gibt, die $\mathbf{0}$ ergibt.

Beispiel 16. • Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, weil

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

• Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig: Wenn Sie versuchen, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen, so erhalten Sie nur die triviale Lösung:
Elementare Umformungen liefern

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halten wir fest:

Sei \mathbf{A} die Matrix, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ sind. Dann gilt: Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

nur die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat.

Wir nennen eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^m$ von Vektoren ein **Erzeugendensystem** von \mathbb{R}^m , wenn sich jeder Vektor von \mathbb{R}^m als Linearkombination von Vektoren aus E schreiben lässt. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem nennt man eine **Basis**. Eine mögliche Basis besteht aus den Einheitsvektoren \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, m$, es gibt aber noch weitere. Die drei linear

unabhängigen Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

beispielsweise sind auch eine Basis, denn: Wir haben in Beispiel 16. die zugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix \mathbf{I} transformiert. Das zeigt, dass das Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist. Also bilden die drei Vektoren ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis.

Es gilt

Satz 3 • Jede Basis von \mathbb{R}^m hat m Elemente.

- Eine Menge von m linear unabhängigen Vektoren im \mathbb{R}^m ist stets ein Erzeugendensystem, also eine Basis.

Ist $E \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Menge von Vektoren (nicht unbedingt ein Erzeugendensystem), so heisst die Menge der Vektoren, die sich als Linearkombination von Vektoren in E schreiben lassen, der von E erzeugte **Unterraum** U . Ein Unterraum hat die folgende wichtige Eigenschaft: Sind $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $\mathbf{u} \cdot a + \mathbf{v} \cdot b \in U$.

Unterräume verhalten sich in vielerlei Hinsicht ähnlich wie der Vektorraum \mathbb{R}^m , insbesondere hat auch jeder Unterraum eine Basis. Es gilt, dass je zwei Basen von U gleichviele Elemente haben. Die Anzahl der Elemente in einer Basis von U heisst die Dimension von U . Ist U ein Unterraum von \mathbb{R}^m , so ist die Dimension von U kleiner (oder gleich) m . Der einzige m -dimensionale Unterraum von \mathbb{R}^m ist \mathbb{R}^m selber. Geometrisch sind die eindimensionalen Unterräume von \mathbb{R}^3 die Geraden durch $\mathbf{0}$. Die zweidimensionalen Unterräume sind die Ebenen durch $\mathbf{0}$.

Mit dem Begriff der Dimension eines Unterraumes können wir den bereits früher verwandten Begriff des Freiheitsgrades genauer erläutern. Sei

$$L_h = \{\mathbf{v} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungs-

systems. Dann sind alle Linearkombinationen, die Sie mit Elementen aus L bilden können, ebenfalls Lösungen des Systems, also ebenfalls in L : Nehmen Sie an, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot a + \mathbf{v} \cdot b$, dann gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{u}a + \mathbf{v}b) = (\mathbf{A}\mathbf{u})a + (\mathbf{A}\mathbf{v})b = \mathbf{0}a + \mathbf{0}b = \mathbf{0},$$

also $\mathbf{w} \in L$. Also besteht L aus allen Linearkombinationen, die Sie mit Elementen aus L bilden können, L ist also ein Unterraum. Deshalb hat L eine Basis. Die Mächtigkeit dieser Basis ist gerade die Anzahl der "Freiheitsgrade".

Beispiel 17. Wir betrachten

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 6 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenumformungen liefern

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten einen Vektor im Lösungsraum, wenn wir $x_4 = 0$ und $x_3 = 1$ setzen:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einen zweiten Vektor bekommen wir mit $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Erzeugnis von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 ist der Lösungsraum des

homogenen Systems. Wenn wir schreiben

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}b \\ -\frac{3}{2}a - \frac{5}{2}b \\ a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

so heißt das ja gerade

$$L = \{ \mathbf{v}_1 a + \mathbf{v}_2 b : a, b \in \mathbb{R} \}$$

Es gilt (vergleiche Seite 295)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$. Die Dimension des Lösungsraumes von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist $n - \text{Rang}(\mathbf{A})$.

Wir können uns den Rang von \mathbf{A} als die Dimension des Unterraumes vorstellen, der von den Zeilen von \mathbf{A} aufgespannt wird. Der Rang gibt die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen an. Wenn der Rang z.B. r ist, die Anzahl der Zeilen (Gleichungen) m ist, so ist $r \leq m$. Es sind sozusagen $m - r$ Gleichungen "redundant"; eigentlich werden nur r Gleichungen "gebraucht".

Durch jede dieser r wesentlichen Gleichungen geht genau ein Freiheitsgrad verloren. (Diese etwas vagen Formulierungen sind mathematisch eher unpräzise, sollen Ihnen aber helfen, ein Gefühl für die Bedeutung des Ranges einer Matrix zu bekommen, wenn es um das Lösen linearer Gleichungssysteme geht.)

Wenn Sie den Rang einer Matrix bestimmen wollen, dürfen Sie nicht nur elementare Zeilen- sondern auch elementare Spaltenumformungen machen, also

- Vertauschen von Spalten
- Addition des λ -fachen von Spalte i zu Spalte j
- Multiplikation einer Spalte mit $\lambda \neq 0$.

WARNUNG: Sie dürfen nur dann Zeilen- und Spaltenumformungen machen, wenn Sie ausschließlich den Rang bestimmen wollen. Wenn Sie ein Gleichungssystem wirklich lösen wollen, müssen Sie sich auf Zeilenumformungen beschränken.

4.5 Determinanten

Quadratische Gleichungssysteme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $n = \text{Rang}(\mathbf{A})$ haben nur den Nullvektor als Lösung. In diesem Fall hat $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung: es gibt eine Lösung, weil $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ ist. Diese Lösung ist eindeutig (weil es keinen Freiheitsgrad gibt).

Es gilt sogar noch etwas mehr:

Satz 4 Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, so gibt es eine Matrix $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

genau dann, wenn $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n$ ist (\mathbf{I}_n Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{(n,n)}$).

Die Matrix \mathbf{A}^{-1} heißt die **Inverse** von \mathbf{A} . Wenn wir \mathbf{A}^{-1} kennen, dann können wir $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ auch wie folgt lösen: Wir multiplizieren beide Seiten mit \mathbf{A}^{-1} und erhalten

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Es könnte sich also lohnen, \mathbf{A}^{-1} zu bestimmen, insbesondere wenn man $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ für viele verschiedene \mathbf{b} lösen muss.

Ein **erstes Verfahren zur Inversenbestimmung** sieht so aus: Wir betrachten das Schema

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I})$$

d.h. links vom Strich steht die Matrix \mathbf{A} , rechts die Einheitsmatrix. Durch elementare Zeilenumformungen von \mathbf{A} versuchen wir, die linke Seite in die Einheitsmatrix umzuformen. Dabei muss die Seite rechts vom Strich entsprechend mit umgeformt werden. Am Ende steht rechts die Matrix \mathbf{A}^{-1} .

Beispiel 18. Wir wollen die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array} \right)$$

Wir machen die **Probe**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/5 \\ -1 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt auch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/5 \\ -1 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir jetzt beispielsweise

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösen wollen, multiplizieren wir einfach mit \mathbf{A}^{-1} :

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/5 \\ -1 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Eine **Probe**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestätigt dies.

Ein wichtiges Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix ist das Determinantenkriterium. Zunächst zur Definition der Determinante. Ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

eine Matrix in $\mathbb{R}^{(2,2)}$, dann heißt

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

die **Determinante** von \mathbf{A} . Zur Berechnung der Determinante einer $n \times n$ -Matrix benutzen wir den Laplace'schen Entwicklungssatz. Dazu brauchen wir den Begriff des **Minors**: Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, dann sei $\mathbf{A}(i|j)$ die $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix von \mathbf{A} , die man durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte von \mathbf{A} erhält. Die Determinante von $\mathbf{A}(i|j)$ heißt **Minor**. Gilt $i = j$, so spricht man von einem **Hauptminor**. Der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}(i|j)) \quad (14)$$

der zunächst nur für 3×3 -Matrizen erklärt ist, ist (ertaunlicherweise) unabhängig von i .

Wir benutzen diesen Ausdruck als **Definition** der Determinante einer 3×3 -Matrix. Wenn wir diese Definition dann wiederum in (14) für $n = 4$ einsetzen, ist der so erhaltene Ausdruck wieder unabhängig von i . Wir können so sukzessive die Determinante beliebiger $n \times n$ -Matrizen erklären. Stets ist die Definition

der $n \times n$ -Determinante, die im Entwicklungssatz auf $(n - 1) \times (n - 1)$ -Determinanten beruht, unabhängig vom gewählten Zeilenindex i . Wir können so also sukzessive Determinanten von $n \times n$ -Matrizen berechnen. Wir machen darauf aufmerksam, dass in (14) die Unabhängigkeit vom Zeilenindex i nicht offensichtlich ist!

Beispiel 19. Wir wollen die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir entwickeln zunächst nach der ersten Zeile, d.h. wir setzen in (14) $i = 1$. Unter Beachtung der Definition von (2×2) -Determinanten erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= (-1)^2 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \\
&\quad + (-1)^3 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \\
&\quad + (-1)^4 \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^2 \cdot 3 \cdot 13 + (-1)^3 \cdot (-1) \cdot 11 + \\
&\quad + (-1)^4 \cdot 0 \cdot 23 = \\
&= 39 + 11 = 50.
\end{aligned}$$

Entwickeln nach der zweiten Zeile ($i = 2$) gibt

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= (-1)^3 \cdot 5 \cdot (-2) + (-1)^4 \cdot 8 \cdot 6 + \\
&\quad + (-1)^5 \cdot 1 \cdot 8 = \\
&= 10 + 48 - 8 = 50,
\end{aligned}$$

nach der dritten Zeile

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= (-1)^4 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1)^5 \cdot 3 \cdot 3 + \\
&\quad + (-1)^6 \cdot 2 \cdot 29 = \\
&= 1 - 9 + 58 = 50.
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung einer 3×3 -Determinante

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

können Sie folgendes Schema zu Hilfe nehmen:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

Die Produkte über die drei Diagonalen nach rechts

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \end{array}$$

werden alle addiert, die nach links

$$\begin{array}{l} a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \\ a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{array}$$

werden mit -1 multipliziert und dann ebenfalls addiert. Die Summe dieser sechs Terme (3 davon mit einem negativen Vorzeichen) sind die Determinante von \mathbf{A} .

WARNUNG: Das geht nur für $n = 3$ so einfach!

Bevor wir nun einige Regeln aufstellen, die das Berechnen von Determinanten vereinfachen, hier der Satz, der zeigt, warum Determinanten wichtig sind:

Satz 5 Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) \neq 0 &\Leftrightarrow \text{Rang}(\mathbf{A}) = n \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ ist invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ ist für alle } \mathbf{b} \text{ eindeutig lösbar} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ hat nur die Lösung } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Die folgende Regel ist sehr nützlich:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top).$$

Das bedeutet z.B., dass Sie auch nach Spalten entwickeln können:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}(i|j))$$

Ganuso wie die Summe in (14) unabhängig von i war, ist diese Summe unabhängig von der konkreten Auswahl der Spalte j .

Beispiel 20.

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} &= (-1)^2 \cdot 3 \cdot 13 + (-1)^3 \cdot 5 \cdot (-2) + \\ &\quad + (-1)^4 \cdot (-1) \cdot (-1) \\ &= 39 + 10 + 1 = 50\end{aligned}$$

(entwickeln nach der ersten Spalte).

Die Tatsache $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$ bedeutet auch, dass die folgenden Rechenregeln richtig bleiben, wenn Sie Zeilen durch Spalten ersetzen!

- Werden in \mathbf{A} zwei Zeilen vertauscht, ändert sich das Vorzeichen von $\det(\mathbf{A})$.
- Wenn man das λ -fache von Zeile i zu Zeile j addiert ($i \neq j$), ändert sich die Determinante nicht.
- Wird eine Zeile von \mathbf{A} mit λ multipliziert, so wird dadurch auch die Determinante mit λ multipliziert.
- $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$.

Zum Abschluss wollen wir noch ein **zweites Verfahren zur Inversenbestimmung** angeben. Dazu definieren wir

$$\mathbf{A}_{ad} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

mit

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}(j|i)).$$

Die Matrix \mathbf{A}_{ad} heißt die **Adjungierte** von \mathbf{A} . Es gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{ad} = \mathbf{A}_{ad} \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}$$

Insbesondere gilt im Fall $\det(\mathbf{A}) \neq 0$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{A}_{ad}$$

Beispiel 21. Wir wollen die Inverse von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir wissen bereits $\det(\mathbf{A}) = 50$. Mit Hilfe der Adjungierten sieht man sofort

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 13 & 2 & 1 \\ -11 & 6 & -3 \\ 23 & -8 & 29 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 1 \\ -11 & 6 & -3 \\ 23 & -8 & 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Wir weisen darauf hin, dass es ein auf Determinanten beruhendes Verfahren zur Lösung linearer

Gleichungssysteme gibt (Cramer'sche Regel). Die Cramer'sche Regel hat praktisch wenig Bedeutung, steht aber in vielen Lehrbüchern. Wir verzichten hier darauf und verweisen ggf. auf SCHWARZE, Kapitel 19.5.