Kapitel 5. Differenzialrechnung für Funktionen einer Variablen

Ist f eine ökonomische Funktion, so ist oft wichtig zu wissen, wie sich die Funktion bei kleinen Änderungen verhält. Beschreibt etwa f einen Wachstumsprozeß, so ist die Wachstumsgeschwindigkeit von Interesse oder auch die relative Wachstumsrate. Ist f eine Steuerfunktion, so ist die Frage, welcher Steuerprozentsatz auf einen kleinen Zuverdienst zu zahlen ist. Für ein Unternehmen ist interessant, wie sich die (relative) Nachfrage nach einem Produkt bei (relativ) kleinen Preisänderungen ändert.
Wichtig ist auch die Bestimmung von Extremwerten ökonomischer Größen, etwa der Minimierung von Kosten oder der Maximierung von Gewinnen.
Bei der Beantwortung dieser Fragen ist die Differenzialrechnung nützlich. Sie dient dazu, das Verhalten einer Funktion besser zu verstehen, sowohl global durch einen Gesamtüberblick über den Funktionsgraphen (Kurvendiskussion) als auch lokal in der Nähe eines vorgegebenen Punktes.
Alle Funktionen in diesem Kapitel sind stets von der Form $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich ist.

Beispiel 1. Angenommen, die Kostenfunktion eines

Unternehmens für die Produktion von x Stücken eines Gutes sei gegeben durch

$$K(x) = 20\sqrt{x} + 100.$$

Nun ist das Unternehmen daran interessiert, wie sich die Kosten bei kleiner Änderung der Produktionsmenge verändern. Eine standardisierte Information ist hierbei zum Beispiel, wie sich $K(x)$ ändert, wenn man x um eine Einheit erhöht. Die Änderung ist dann $K(x+1) - K(x)$. Ist nun x nicht die Anzahl, sondern etwa gemessen in Tonnen, so ist auch eine Änderung von x um $0,1$ oder $0,01$ interessant. Es sollte klar sein, dass eine solche Änderung bereits von der Ausgangszahl x abhängt. Etwa ist

$$K(101) - K(100) = 20(\sqrt{101} - \sqrt{100}) \approx 0,998,$$

$$K(1001) - K(1000) = 20(\sqrt{1001} - \sqrt{1000}) \approx 0,361.$$

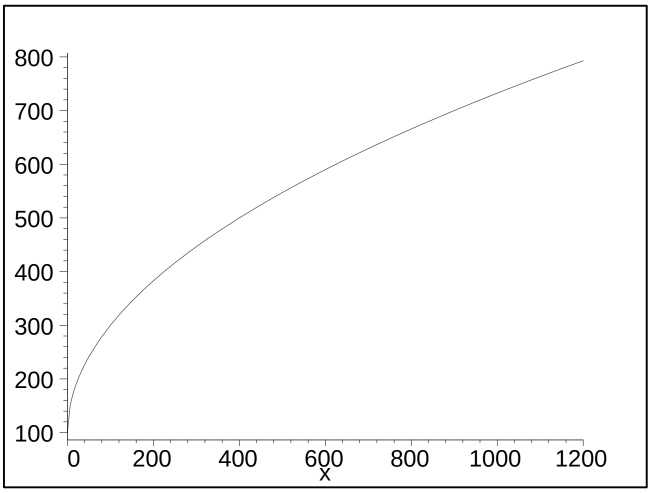
Zieht man (anstelle von $x+1$) auch andere Änderungen von x in Betracht, so ist es sinnvoll, die relative Änderung der Kosten im Verhältnis zur Änderung von x zu berechnen. Das ist also der Quotient

$$\frac{K(x+h) - K(x)}{x+h-x} = \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$$

(etwa für die Werte $h = 1, 0.1, 0.01$) und gibt die durchschnittliche Kostenänderung pro zusätzlicher Mengeneinheit an. In der folgenden Tabelle sind diese relativen Änderungen für einige Werte von x angegeben.

x	$\frac{K(x+1)-K(x)}{1}$	$\frac{K(x+0{,}1)-K(x)}{0{,}1}$	$\frac{K(x+0{,}01)-K(x)}{0{,}01}$
10	3,087	3,154	3,161
100	0,998	0,1	0,1
1000	0,316	0,316	0,316

Man sieht, dass sich für kleine Werte von x die Größe der Änderung von x stärker auf die relative Änderung der Kosten auswirkt als für große Werte. Das kann man auch am Graphen sehen, denn die Funktionswerte unterscheiden sich in der Nähe von $x = 10$ stärker voneinander als etwa bei $x = 100$ oder $x = 1000$.



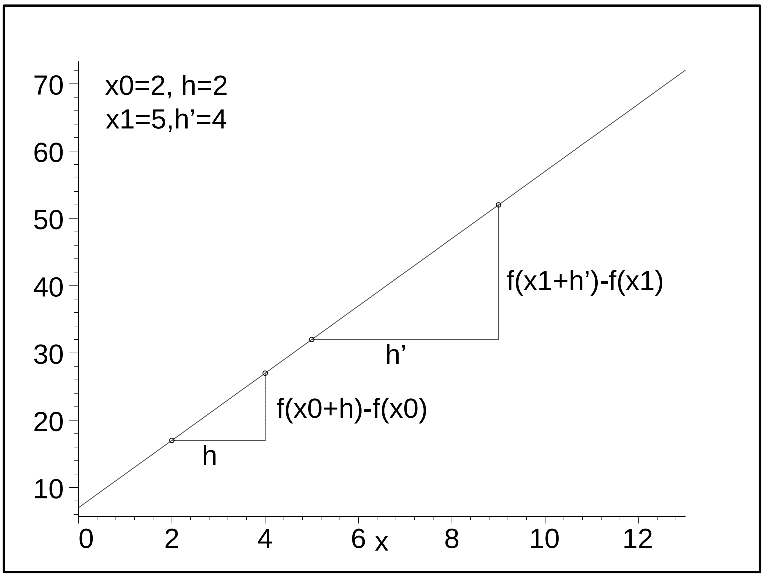
Man sieht, dass die obige Situation durch die Höhenänderung (oder Steigung) des Graphen erklärt wird.

5.1 Differenziation

Bevor wir eine formale Definition der Ableitung einer Funktion angeben, soll zunächst beschrieben werden, wie man die Steigung einer (krummlinigen) Funktion in einem Punkt festlegen und bestimmen kann.

Steigung einer Funktion in einem Punkt

1. Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Gerade, so ist die Steigung des zugehörigen Graphen an jeder Stelle gleich und läßt sich durch ein Steigungsdreieck ermitteln.



Die Steigung ist definiert als Höhe durch Breite des Steigungsdreiecks, also

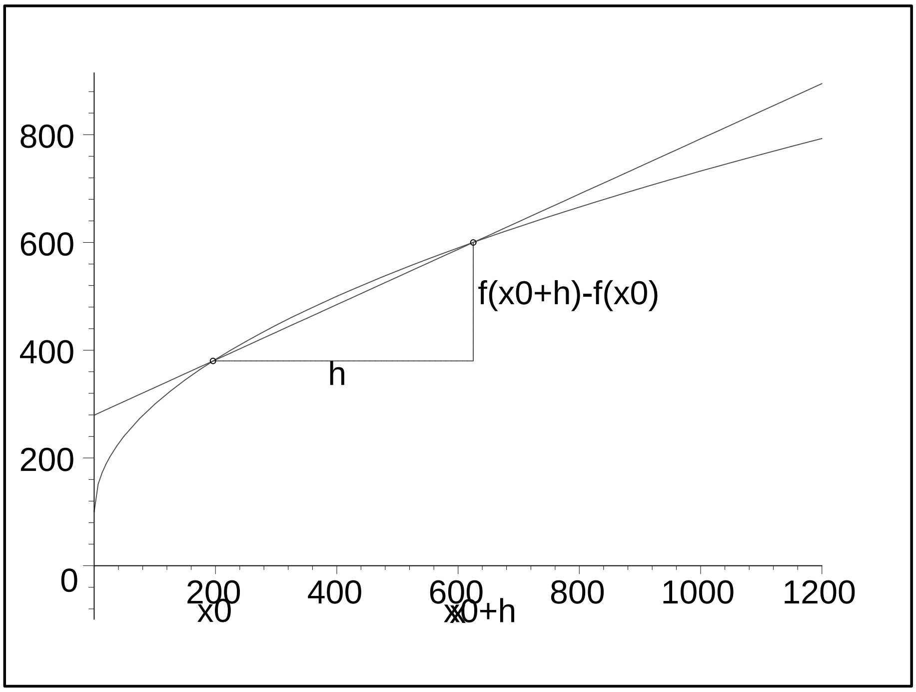
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Hierbei spielt es offensichtlich keine Rolle, wo das Dreieck eingezeichnet wird und wie weit die beiden Stellen x_0 und $x_0 + h$ auseinanderliegen. Sie ist also unabhängig von x_0 und h. Ist $f(x) = cx + d$, so ist $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{ch}{h} = c$.

2. Ist nun $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit einem krummlinigen Graphen, so lassen sich immer noch Steigungsdreiecke zu gegebenen Stellen x_0 und x_0+h zeichnen; die daraus resultierende Größe

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{15}$$

hängt nun aber im allgemeinen sowohl von x_0 als auch von h ab (siehe Beispiel 1).



Sie gibt die (relative) Veränderung der Funktionswerte im Verhältnis zu den x-Werten an. Außerdem läßt sie sich als durchschnittliche Steigung von f auf dem Abschnitt $[x_0, x_0 + h]$ auffassen. Das ist die Steigung der Geraden, die durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ geht. In diesem Zusammenhang heißen diese Geraden auch Sekanten. Man benutzt nun diese Steigungsdreiecke für einen Grenzprozess: wählt man h immer kleiner, so rückt der Punkt $x_0 + h$ immer näher an x_0, das Steigungsdreieck wird immer kleiner und die Größe (15) liefert die durchschnittliche Steigung auf einem sehr kleinen Abschnitt in der Nähe von x_0. Falls dieser Grenzprozess einen Grenzwert hat, etwa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a,$$

so nennt man a die Ableitung von f an der Stelle x_0. Als Grenzwert der Sekanten erhält man dann gerade die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0. Deren Steigung ist a.

(Differenzenquotient, Differenzialquotient, Ableitung)
Sei D ein offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ eine Stelle.

1. Für $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ heißt $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ein Differenzenquotient von f.

2. Die Funktion f heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall wird die Notation

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

benutzt. Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 oder auch Differenzialquotient von f in x_0.

3. Ist f an jeder Stelle $x \in D$ differenzierbar, dann heißt f differenzierbar, und die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ heißt Ableitung von f.

Beachte, das Symbol $\lim_{h\to 0}$ steht für den beidseitigen Grenzwert. Man muss also sowohl positive als auch negative Werte für h betrachten!

Die Größe h wird in der Literatur oft als Δx geschrieben. Sie steht für eine (kleine) Änderung der Argumente x. Für die zugehörige Änderung der Funktionswerte $f(x+h) - f(x)$ wird dann Δf geschrieben.

Bemerkung:
Oft werden statt der Bezeichnungen x_0 und $x_0 + h$ für die zwei Stellen auch x_0 und x gewählt. Setzt man $h := x - x_0$, also $x = x_0 + h$, so lautet dann der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und die Ableitung, falls sie existiert, ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Für kleine Werte von h (oder für x nahe bei x_0) ist der Differenzenquotient eine Annäherung an die Ableitung:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Geometrisch bedeutet diese Approximation, dass die Funktion in der Nähe von x_0 durch die Tangente an der Stelle x_0 angenähert wird. Denn

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite ist die Gleichung der Geraden mit Steigung $f'(x_0)$ durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Beispiel 2.

1. **Lineare Funktion:**
   Eine Funktion der Form $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c\,x + d$ ist eine lineare Funktion. Der Funktionsgraph ist die Gerade
   $$\{(x, c\,x + d) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
   mit Steigung c. Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Differenzenquotient gegeben durch
   $$\frac{c(x_0 + h) + d - (cx_0 + d)}{h} = \frac{ch}{h} = c.$$
   Das bestätigt noch mal das Bild auf Seite 334: Der Differenzenquotient hängt weder von x_0 noch von h ab. Insbesondere ist $f'(x_0) = c$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Funktion hat überall die gleiche Steigung. Die Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist somit die konstante Funktion $f'(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^3$:
Mithilfe des binomischen Lehrsatzes (Seite 206) erhält man für den Differenzenquotienten an der Stelle x

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
&= 3x^2 + 3xh + h^2
\end{aligned}
$$

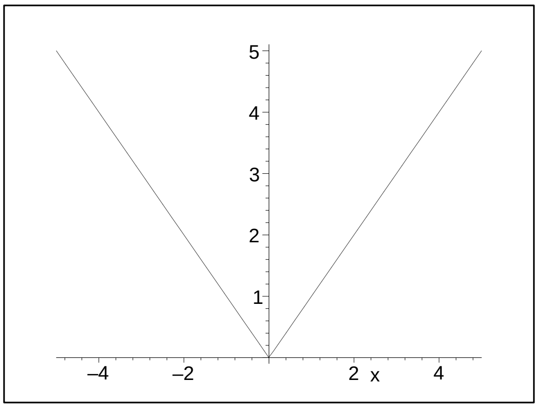
Damit ist der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 = f'(x).$$

Ähnlich läßt sich zeigen:

$$f(x) = x^n, \quad \text{dann ist } f'(x) = nx^{n-1}.$$

3. $f(x) = |x|$:
Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.



Offensichtlich läßt sich an der Stelle $x_0 = 0$ keine eindeutige Tangente einzeichnen. Die Steigung springt hier abrupt von -1 auf 1.
Genauer gesagt: Steigungsdreiecke, die links von $x_0 = 0$ liegen, liefern alle die Steigung -1, die, die rechts liegen, die Steigung 1. Daher existiert der beidseitige Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ nicht und die Funktion ist dort nicht differenzierbar.

Hat eine Funktion eine Sprungstelle an der Stelle x_0, so hat sie dort sicherlich keine Tangente. Genauer:

> Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, dann ist f auch stetig im Punkt x_0.

Aber nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar, wie die Betragsfunktion in Beispiel 2.3 zeigt.

Beispiel 3. (Ableitung einiger Grundfunktionen) Die Definitionsbereiche der unten stehenden Funktionen haben wir bereits in Kapitel 2 untersucht.

$f(x)$	c	x^n $(n \in \mathbb{N})$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	e^x
$f'(x)$	0	$n \cdot x^{n-1}$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	e^x

$f(x)$	a^x $(a > 0)$	$\ln(x)$	$\log_a(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$
$f'(x)$	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln(a)}$

$f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$f'(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Speziell ist für $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ die Ableitung $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ und allgemein

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad \text{dann } f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Mit den obigen Grundfunktionen und folgenden Rechenregeln lassen sich leicht die Ableitungen vieler Funktionen berechnen.

Differenziationsregeln:

1. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in D$ differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $f + g, f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, und es gilt:

   Summenregel:
   $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

   Produktregel:
   $$(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

   Ist $g(x) \neq 0$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar mit

   Quotientenregel:
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$$

2. Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Sei f in $x \in D$ differenzierbar, und sei g in $f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt

   Kettenregel: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$

Als Spezialfall der Produktregel ergibt sich

$$(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

für jede differenzierbare Funktion f und jede Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 4.

1. Für $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2$ ist

$$f'(x) = 15x^4 - 40x^3 + 6x^2 - 14x.$$

2. Sei $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{7x - 5}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x-2)(7x-5) - 7(3x^2 - 2x + 1)}{(7x-5)^2} \\ &= \frac{21x^2 - 30x + 3}{(7x-5)^2} \end{aligned}$$

3. Für $S(x) = \sin^2(x)$ können wir schreiben $S = g \circ f$ mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2$. Daher ist

$$S'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Allgemein ist für eine Funktion $f(x) = g(x)^n$

$$f'(x) = ng(x)^{n-1}g'(x).$$

4. Für $f(x) = e^{(ax^2+bx+c)^2}$ ist mit der Kettenregel

$$f'(x) = e^{(ax^2+bx+c)^2} \cdot 2 \cdot (ax^2 + bx + c) \cdot (2ax + b)$$

Manchmal ist es einfacher, die Ableitung der zusammengesetzten Funktion $(\ln \circ f)(x) = \ln(f(x))$ zu berechnen. Dann kann man folgende Beziehung zur Berechnung der Ableitung von f benutzen.

Logarithmische Differenziation:
Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}_+$ in x differenzierbar. Die Kettenregel liefert dann

$$(\ln \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

also $$f'(x) = f(x) \cdot (\ln \circ f)'(x).$$

Beispiel 5. Sei

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Dann ist

$$f(x) = e^{\ln((1+\frac{1}{x})^x)} = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

und daher gilt für $g(x) = \ln(f(x)) = x\ln(1+\frac{1}{x})$ mithilfe von Produktregel, Kettenregel sowie Beispiel 3.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Somit ist

$$f'(x) = g'(x)f(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Als letzte Differenziationsregel betrachten wir

Ableitung der Umkehrfunktion:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine injektive stetige Abbildung, und sei $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Ist f in einem Punkt $x \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, dann ist f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Beispiel 6. Sei $f(x) = e^x$. Die Funktion ist injektiv (siehe Seite 117). Die Umkehrfunktion ist gegeben durch $g(x) = f^{-1}(x) = \ln(x)$. Nach Beispiel 3. ist $f'(x) = e^x$ und daher $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die obige Rechenregel liefert

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

wie es auch schon in Beipiel 3. angegeben ist.

Als neue Ableitungen erhält man die der trigonometrischen Umkehrfunktionen.

Beispiel 7. (Ableitung der Arcusfunktionen)

f	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$D(f)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
$W(f)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
f^{-1}	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$	$\mathrm{arccot}(x)$
$(f^{-1})'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$

Man kann den Differenziationsprozess unter Umständen auch auf die Ableitung anwenden.

Ableitungen höherer Ordnung:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ ihrerseits in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar, dann heißt

$$f''(x) = (f')'(x)$$

die zweite Ableitung von f im Punkt x und die Funktion $f'' : D \to \mathbb{R}$ heißt zweite Ableitung von f.
Allgemein heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, $n \in \mathbb{N}$, wenn die $(n-1)$-te Ableitung differenzierbar ist. Die n-te Ableitung wird auch mit $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Insbesondere wird $f^{(0)} = f$ gesetzt und es ist $f^{(1)} = f'$ und $f^{(2)} = f''$.
Die Funktion f heißt ∞ oft differenzierbar, wenn alle Ableitungen $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, existieren.

Die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung wird im nächsten Abschnitt erklärt.

Beispiel 8. Mithilfe von Beispiel 3. und den Rechenregeln lassen sich folgende Ableitungen berechnen.

1. $f(x) = \ln(x)$:

$$f'(x) = \tfrac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\tfrac{1}{x^2},$$
$$f^{(3)}(x) = \tfrac{2}{x^3} = 2x^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = \tfrac{-6}{x^4}, \ldots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

2. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 10$:

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2x, \quad f''(x) = 20x^3 - 12x + 2,$$
$$f^{(3)}(x) = 60x^2 - 12, \qquad f^{(4)}(x) = 120x,$$
$$f^{(5)}(x) = 120,$$
$$f^{(6)}(x) = 0 = f^{(n)}(x), \text{ für } n \geq 6$$

3. $f(x) = 3\mathrm{e}^x$:

$$f'(x) = 3\mathrm{e}^x, \quad f''(x) = 3\mathrm{e}^x, \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = 3\mathrm{e}^x.$$

Polynome, rationale Funktionen, die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich unendlich oft differenzierbar.