Es folgt nun noch ein Nachtrag zum Thema Grenzwerte von Funktionen. Wir hatten in Abschnitt 2.6 Beispiele von Funktionen gesehen, bei denen die Grenzwertregeln von Seite 171 nicht weiterhelfen, etwa bei Quotienten von Funktionen, wo Zähler und Nenner für $x \to x_0$ beide gegen Null (oder beide gegen unendlich) konvergieren. Mithilfe der Differentiation ist es nun möglich, weitere Grenzwertregeln aufzustellen, mit denen sich etwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \text{ oder } \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}$$

bestimmen lassen.

Zunächst soll aber auch noch die Konvergenz von Funktionen für $x \to \infty$ eingeführt werden.

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$) konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, falls es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $t(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass gilt

$$\text{ist } x > t(\varepsilon), \text{ dann folgt } |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{bzw. ist } x < -t(\varepsilon), \text{ dann folgt } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to \infty} = a$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} = a$.

f heißt **für $x \to \infty$ konvergent gegen** ∞ (bzw. $-\infty$), falls es für alle $M \in \mathbb{R}^+$ ein $t(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass gilt

$$\text{ist } x > t(\varepsilon), \text{ dann folgt } f(x) > M$$

$$\text{bzw. ist } x > t(\varepsilon), \text{ dann folgt } f(x) < -M.$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{x \to \infty} = \infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to \infty} = -\infty$.

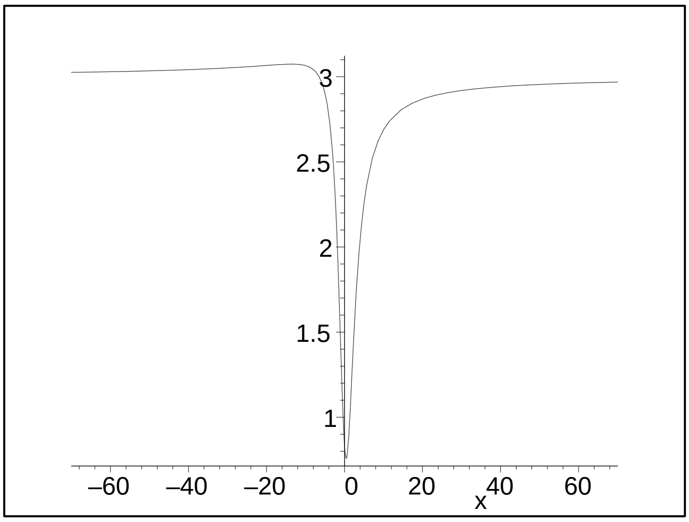
Analog läßt sich Konvergenz gegen $\pm\infty$ für $x \to -\infty$ definieren.

Ist f nicht konvergent in einem der obigen Sinne, so heißt f auch **divergent**.

Es gelten die analogen Rechenregeln wie für Grenzwerte bei Konvergenz für $x \to x_0$, siehe Seite 171.

Die Situation läßt sich genau wie bei Grenzwerten für $x \to x_0$ mit waagerechten Streifen der Breite 2ε um den Wert a veranschaulichen. Für $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ muss der Funktionsgraph innerhalb des gesamten senkrechten Streifens rechts von $t(\varepsilon)$ auch innerhalb des waagerechten Streifens liegen.

Beispiel 9. 1. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6}$

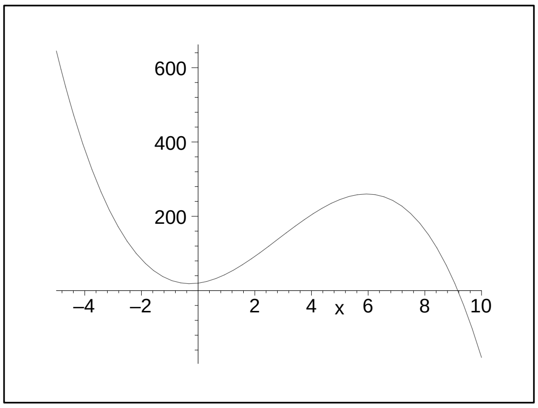


Der Graph zeigt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Beweisen läßt sich dies genauso wie bei Folgen durch Umformung zu

$$\frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{6}{x^2}},$$

und Benutzen von $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

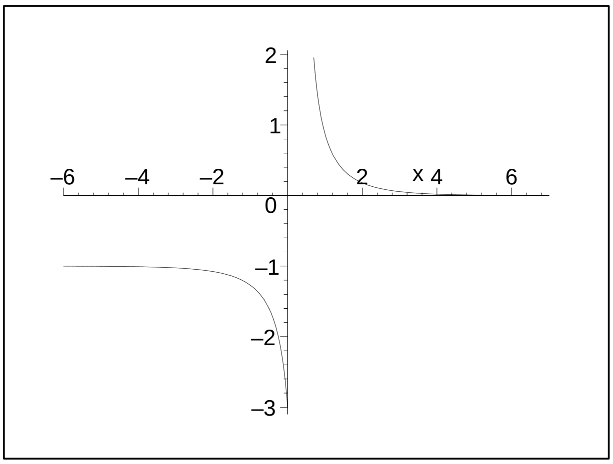
2. $f(x) = -2x^3 + 17x^2 + 10x + 20$



Der Graph zeigt $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und dies läßt sich mit den gleichen Methoden wie in 1. (Nenner=1) zeigen.

3. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

4. $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^{2x} - 2}$. Der Graph



zeigt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Der zweite Grenzwert folgt sofort aus den Rechenregeln auf Seite 171 zusammen mit dem vorigen Beispiel. Der erste Grenzwert wird in Beispiel 10.3. nachgewiesen.

Regeln von de L'Hospital:
Seien $D = (a,b)\setminus\{x_0\}$ mit $a < x_0 < b$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, sowie $g'(x) \neq 0$ auf D. Außerdem gelte

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \tag{16}$$

oder

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty. \tag{17}$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a. \tag{18}$$

Die gleichen Aussagen gelten auch für Grenzwerte der Form $\lim_{x\searrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x\nearrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Man beachte, dass die Implikation (18) auch beinhaltet, dass im Falle der Konvergenz von $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ überhaupt existiert.

Es ist ganz wichtig, dass eine der Voraussetzungen (16) oder (17) erfüllt ist. Andernfalls liefert die Implikation (18) ein falsches Ergebnis. Das wird in Beispiel 10.8 illustriert. Wenn (16) und (17) beide nicht gelten, läßt sich der Grenzwert sowieso direkt bestimmen.

Beispiel 10.

1. $\boxed{\frac{0}{0}}$ Seien $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x$ und $x_0 = 0$. Dann ist (16) erfüllt und wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

ist mit (18): $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

2. $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ Seien $f(x) = x^3$ und $g(x) = e^x$. Dann ist (17) bei $x_0 = \infty$ erfüllt und iterative Anwendung der Regel von de L'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f^{(3)}(x)}{g^{(3)}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

3. $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ Seien $f(x)=e^x+2$ und $g(x)=e^{2x}-2$. Dann ist (17) bei $x_0=\infty$ erfüllt und daher

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2}{e^{2x}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^x}=0.$$

4. $\boxed{0\cdot\infty}$ Seien $f(x)=\ln(x)$, $g(x)=x$ und $x_0=0$. Es soll $\lim\limits_{x\searrow 0}\ln(x)x$ bestimmt werden. Dies ist zwar kein Quotient, aber durch Umformen erhält man

$$\lim_{x\searrow 0}\ln(x)\cdot x=\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$
$$=\lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\searrow 0}(-x)=0.$$

5. $\boxed{1^\infty}$ Seien $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ und $g(x) = x$. Dann ist

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(f(x))\cdot g(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x}.$$

Nun ist der Exponent für $x \to \infty$ vom Typ $\boxed{0 \cdot \infty}$ und daher ist wie in 3.

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Also ist $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$, vgl. Seite 209.

6. $\boxed{\infty^0}$ Seien $f(x) = x + 1$ und $g(x) = \frac{2}{\ln(x)}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{2}{\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(f(x))\cdot g(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\ln(x+1)\cdot \frac{2}{\ln(x)}}.$$

Der Exponent ist für $x \to \infty$ vom Typ $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$. Somit ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{x}{x+1} = 2.$$

Also ist $\quad \lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{2}{\ln(x)}} = e^2.$

7. $\boxed{0^0}$ Für $f(x) = \sqrt{x}\cdot 3^x$ und $g(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0}\left(\sqrt{x}3^x\right)^{\frac{1}{\ln(x)}} &= \lim_{x\searrow 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} e^{\ln(f(x))\cdot g(x)} \\ &= \lim_{x\searrow 0} e^{\ln(\sqrt{x}3^x)\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\searrow 0} e^{\frac{\frac{1}{2}\ln(x)+x\ln(3)}{\ln(x)}}.\end{aligned}$$

Der Exponent ist für $x \searrow 0$ vom Typ $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$, also

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(x)+x\ln(3)}{\ln(x)} &= \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{2x}+\ln(3)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{2}+x\ln(3)\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Damit ist $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\sqrt{x}3^x\right)^{\frac{1}{\ln(x)}} = \sqrt{e}.$

8. Abschließend noch ein Beispiel, das die Notwendigkeit der Voraussetzung (16) oder (17) zeigt. Betrachte $f(x) = e^{2x} - 2$ und $g(x) = e^x + 2$. Es soll

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{19}$$

bestimmt werden. Allein die Regel (18) würde wegen

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} 2e^x = 0$$

den Grenzwert 0 für (19) liefern. Das ist aber falsch, denn wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 2$, folglich

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1.$$

Offensichtlich sind weder (16) noch (17) erfüllt.

5.2 Kurvendiskussion

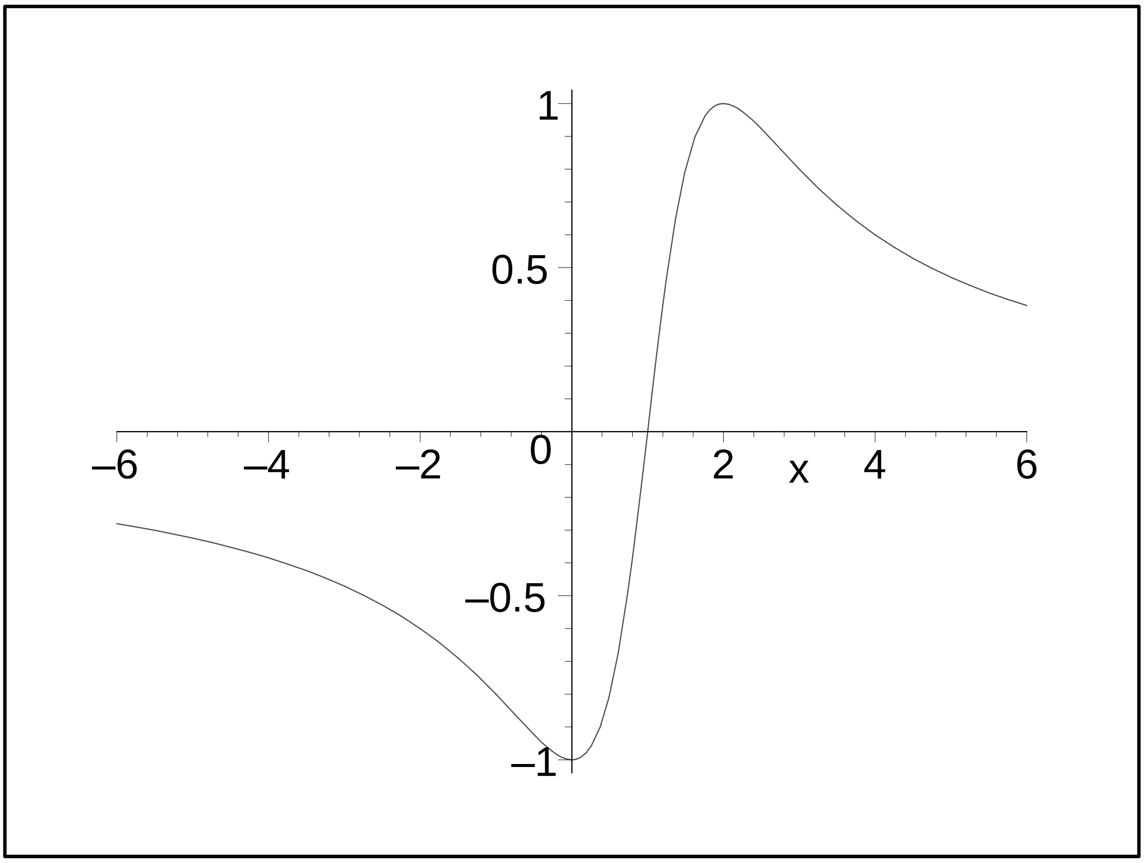
Viele ökonomischen Zusammenhänge werden durch Funktionen beschrieben. Daher ist es wichtig, das Verhalten der Funktionen bestimmen zu können. Hierzu gehören

1. Definitionsbereich
2. Nullstellen
3. Monotonieverhalten und (lokale) Extremwerte,
4. Krümmungsverhalten und Wendepunkte,
5. Asymptotisches Verhalten, d. h. das Aussehen des Graphen an den Rändern des Definitionsbereichs,
6. Verhalten von f an Sprungstellen, Polstellen und Definitionslücken

Dabei ist die Differenzialrechnung ein nützliches Hilfsmittel.

An dem folgenden Beispiel werden alle Begriffe illustriert.

Beispiel A: $g(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$



1. Der maximale Definitionsbereich einer gegebenen Funktion und seine Bestimmung wurde bereits in Abschnitt 2.2 behandelt.

Beispiel A: Da das Nennerpolynom keine Nullstellen hat, ist

$$D(g) = \mathbb{R}.$$

2. Die Bestimmung der Nullstellen, also der Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse, kann ein schwieriges Problem sein. Für Polynome (und folglich auch rationale Funtionen) wurde dies in Abschnitt 2.4 diskutiert.

Beispiel A: Das Zählerpolynom und damit die Funktion g hat die einzige Nullstelle

$$x_0 = 1.$$

Im allgemeinen lassen sich graphisch Näherungswerte für die Nullstellen finden. Ein Verfahren zur approximativen Bestimmung der Nullstellen einer gegebenen Funktion ist das

Newtonverfahren:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wähle einen Wert $x_1 \in D$ und setze für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{(Newtoniteration)}$$

Dann gilt:
Wenn die Newtonfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist der Grenzwert eine Nullstelle von f.

Die dieser Methode zugrunde liegende Idee ist wie folgt:

ist x_n ein Schätzwert für eine Nullstelle, dann wird in $(x_n, f(x_n))$ die Tangente an den Graphen von f gelegt. Sie hat die Gleichung

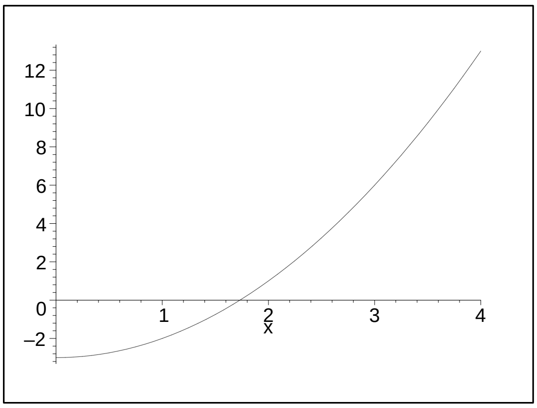
$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

Ihre Nullstelle ist gerade obiger Wert x_{n+1}, der dann als neue Schätzung benutzt wird. Die Frage, in welchen Situationen die Newtoniteration $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, bleibt hier unbehandelt.

Beispiel 11. Sei $f(x) = x^2 - a$ mit $a \in \mathbb{R}_+$. Dann ist die Newtoniteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

In Abschnitt 3.1/Beispiel 12.5 haben wir schon gesehen, dass die Folge gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, falls ein Startwert $x_1 > \sqrt{a}$ gewählt wird.



Man sieht aber auch, dass für einen Startwert $x_1 < a$ bereits $x_2 > a$ ist und daher auch in diesem Fall die Folge x_n gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

3. Monotonieverhalten und lokale Extremwerte

Monotonie einer Funktion auf einem Intervall ist bereits in Abschnitt 2.2 definiert (siehe Seite 103). Im Falle einer differenzierbaren Funktion läßt sich Monotonie mithilfe der ersten Ableitung klären.

Monotonieverhalten

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $I \subseteq D$ ein Intervall. Dann gilt:

f ist konstant in I genau dann, wenn $f' = 0$ auf I.

f ist monoton wachsend in I genau dann,
wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.

f ist monoton fallend in I genau dann,
wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

f ist streng monoton wachsend in I,
wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.

f ist streng monoton fallend in I,
wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.

Beispiel A: Die Ableitung von g ist

$$g'(x) = \frac{2(x^2-2x+2)-(2x-2)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$
$$= \frac{2x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$$

Da der Nenner immer positiv ist, folgt

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(2-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$
$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x(2-x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ oder } x > 2$$

Also ist g auf $(0,2)$ streng monoton wachsend sowie auf $(-\infty,0)$ und auf $(2,\infty)$ streng monoton fallend. Außerdem ist $g'(0) = 0 = g'(2)$ und dies sind die einzigen Nullstellen von $g'(x)$.

An dieser Stelle ist Vorsicht geboten, denn es gibt Funktionen, die auf einem Intervall streng monoton wachsend sind, obwohl die Ableitung dort nicht überall positiv ist.

Beispiel 12. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, aber die Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist nicht überall positiv.

Wenn eine Funktion von wachsend in fallend übergeht, so liegt dort ein lokales Maximum vor.

Lokale/Globale Extremwerte:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f an der Stelle $x_0 \in D$ ein **lokales (relatives) Maximum** (bzw. **lokales (relatives) Minimum**), wenn eine kleine Umgebung von x_0 noch im Definitionsbereich von f liegt und $f(x_0)$ mindestens so groß (bzw. klein) ist wie alle anderen Funktionswerte in dieser Umgebung von x_0. Genauer: wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass gilt $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$ und

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$
$$\text{bzw. } f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **globales Maximum** (bzw. **globales Minimum**), falls

$$f(x_0) \geq f(x) \;\; (\text{bzw. } f(x_0) \leq f(x)) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Gilt dabei in den Ungleichungen nur für x_0 Gleichheit, so sprechen wir von **isolierten lokalen oder globalen Maxima und Minima**.
Die Stelle x_0 heißt in all diesen Fällen lokale (bzw. globale) **Minimalstelle oder Maximalstelle** oder einfach **Extremalstelle**. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ auf dem Graphen heißt lokales (bzw. globales) **Minimum** oder **Maximum** oder einfach **Extremum**.

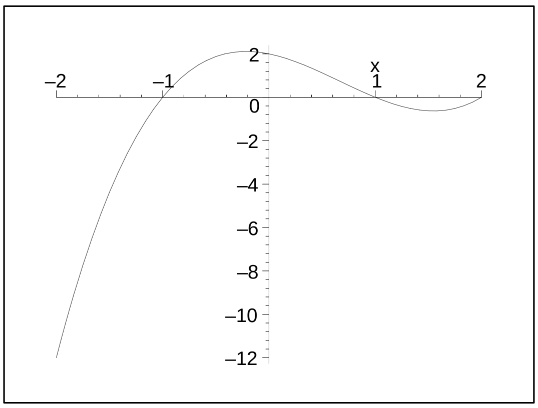
Beispiel A: Die Überlegungen zum Monotonieverhalten zeigen, dass $x_0 = 0$ eine isolierte lokale Minimalstelle und $x_1 = 2$ eine isolierte lokale Maximalstelle ist. Zugehöriges Minimum und Maximum sind die Punkte

$$(0, g(0)) = (0, -1), \quad (2, g(2)) = (2, 1).$$

Beispiel 13. 1. Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ hat in $x_0 = 1$ ein isoliertes globales Maximum aber kein lokales Maximum.

2. Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5$ hat an der Stelle $x_0 = 2$ ein lokales Maximum, aber kein isoliertes lokales Maximum. Ebenso hat sie an jeder anderen Stelle ein lokales Maximum, welches kein isoliertes lokales Maximum ist. Die gleichen Aussagen gelten auch, wenn man Maximum durch Minimum ersetzt.

3. Die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$



hat ein lokales Maximum zwischen -1 und 0 sowie ein lokales Minimum zwischen 1 und 2.

Die genauen Werte lassen sich (manchmal) über die Ableitung bestimmen.

Notwendiges Kriterium für lokale Extrema:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $x_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f. Dann gilt:

$$f'(x_0) = 0.$$

Die Nullstellen von f' heißen **kritische Punkte** oder auch **stationäre Punkte** von f.

In Beispiel 13.3 ist $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Die Nullstellen sind gegeben durch

$$\frac{2+\sqrt{7}}{3} \approx 1,55, \quad \frac{2-\sqrt{7}}{3} \approx -0,22.$$

An diesen Stellen liegen daher die beiden lokalen Extrema. Dies bestätigt auch der Graph. Maximum und Minimum sind

$$(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{20+14\sqrt{7}}{27}) \approx (-0.22,\ 2.11).$$

$$(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, \frac{20-14\sqrt{7}}{27}) \approx (1.55,\ -0.63)$$

Die Umkehrung der obigen Aussage gilt nicht, siehe Beispiel 12. Um sicher zu sein, ob eine Nullstelle der Ableitung zu einem lokalen Extremum gehört, muss man auch noch die weiteren Ableitungen auswerten.

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema:
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in (a,b)$.
Weiterhin gebe es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq m \leq n$, so dass

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(m-1)}(x_0) \neq f^{(m)}(x_0).$$

Ist m gerade, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Extremum und zwar

ein isoliertes lokales Maximum falls $f^{(m)}(x_0) < 0$

ein isoliertes lokales Minimum falls $f^{(m)}(x_0) > 0$

Ist m ungerade, so hat f in x_0 kein isoliertes lokales Extremum; der Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt in diesem Fall **Sattelpunkt**.

Beispiel 14. Sei $f(x) = x^n$.

1. Ist $n = 3$, so ist $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$. Daher ist der Punkt $(0, 0)$ ein Sattelpunkt von f. Dies gilt ebenso für alle ungeraden n, da stets

$$f^{(n-1)} = n! \cdot x \text{ und } f^{(n)} = n!$$

2. Ist $n = 4$, so ist $f^{(3)} = 4! \cdot x$ und $f^{(4)} = 4! = 24$. Somit ist $(0, 0)$ ein isoliertes lokales Minimum von f. Dies gilt ebenso für alle anderen geraden n.

Beispiel A: Nach der Quotientenregel ist

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(4-4x)(x^2-2x+2)^2}{(x^2-2x+2)^4} \\ &\quad + \frac{-2(x^2-2x+2)(2x-2)(4x-2x^2)}{(x^2-2x+2)^4} \\ &= \frac{4(x^3-3x^2+2)}{(x^2-2x+2)^3} = \frac{4(x-1)(x^2-2x-2)}{(x^2-2x+2)^3} \end{aligned}$$

Also ist

$$g''(0) = 1 > 0, \quad g''(2) = -1 < 0.$$

Auf Seite 365 hatten wir bereits $g'(0) = g'(2) = 0$ festgstellt. Folglich hat g an der Stelle $x_0 = 0$ ein isoliertes lokales Minimum und an der Stelle $x_1 = 2$ ein isoliertes lokales Maximum, was wir auch schon auf Seite 367 festgestellt hatten.

Beispiel 15. Sei $f(x) = (x^2 - \frac{3}{2}x)e^x$. Zur Bestimmung eventueller lokaler Extrema bestimmen wir die erste Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - \frac{3}{2})e^x + (x^2 - \frac{3}{2}x)e^x \\ &= (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2})e^x = (x-1)\big(x + \frac{3}{2}\big)e^x \end{aligned}$$

Folglich sind die kritischen Punkte

$$x_0 = 1 \text{ und } x_1 = \frac{-3}{2}.$$

Mit der zweiten Ableitung

$$f''(x) = (2x + \frac{1}{2})e^x + (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2})e^x = (x^2 + \frac{5}{2}x - 1)e^x$$

erhalten wir

$$f''(1) = \frac{5}{2}e > 0, \quad f''\big(\frac{-3}{2}\big) = -\frac{5}{2}e^{\frac{-3}{2}} < 0.$$

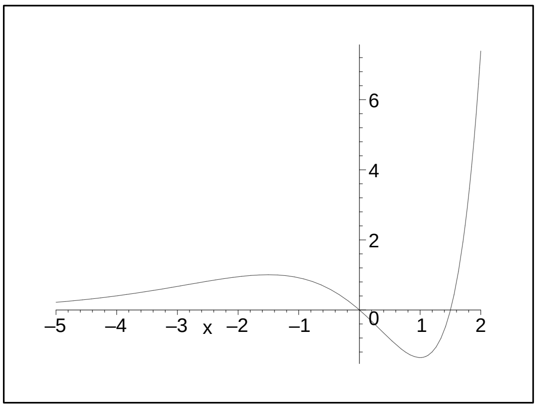
Also liegt ein isoliertes lokales Minimum an der Stelle $x_0 = 1$ vor und ein isoliertes lokales Maximum an der Stelle $x_1 = \frac{-3}{2}$. Die ungefähren Koordinaten der isolierten Extrema sind

$$(1,\ -1.36) \text{ und } (-1.5,\ 1).$$

Man erkennt außerdem

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (1, \infty) \text{ oder } x \in \big(-\infty, -\frac{3}{2}\big),$$
$$f'(x) < 0 \text{ für } x \in \big(-\frac{3}{2}, 1\big).$$

Damit ist die Funktion f auf $(1, \infty)$ sowie $(-\infty, -\frac{3}{2})$ streng monoton wachsend und auf $\big(-\frac{3}{2}, 1\big)$ streng monoton fallend. Hier ist der Graph



So wie wir es gerade getan haben, lassen sich allgemein die kritischen Punkte anhand des Vorzeichenverhaltens der ersten Ableitung klassifizieren.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$. Gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ < 0 & \text{für} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \end{cases}$$

so besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum.
Ist

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad x_0 - \epsilon < x < x_0, \\ > 0 & \text{für} \quad x_0 < x < x_0 + \epsilon. \end{cases}$$

so besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum.
Besitzt die Ableitung f' keinen Vorzeichenwechsel im Punkt x_0, dann hat f an der Stelle x_0 kein isoliertes lokales Extremum.

Zur Bestimmung der globalen Extrema einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein abgeschlossenes oder halboffenes Intervall ist, ist es immer notwendig, die Funktionswerte an den Intervallgrenzen zu bestimmen und mit den Werten an den lokalen Extrema vergleichen.

Beispiel 16. 1. Sei $f : [-4, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + x - 2$. Dann ist $f(-4) = 10$ und $f(2) = 4$. Außerdem ist $f'(x) = 2x + 1$, also $x_0 = -\frac{1}{2}$ ein kritischer

Punkt. Wegen $f''(x) = 2 > 0$ für alle x liegt an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Minimum mit den Koordinaten $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$. Dies muss dann auch ein globales Minimum (auf $[-4, 2]$) sein, denn an den Rändern sind die Funktionswerte größer und weitere lokale Minima gibt es nicht. Die Funktion hat keine isolierten lokalen Maxima. Ein globales Maximum liegt am linken Rand $x_1 = -4$ vor.

2. Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ hat kein globales Maximum und kein globales Minimum.

4. Krümmungsverhalten und Wendepunkte Das Krümmungsverhalten einer Funktion liefert Aussagen darüber, wie stark sich das Wachstum auf einem Intervall ändert.

Beispiel A: Wir wissen bereits, dass die Funktion g zwischen 0 und 2 wachsend ist. Der Graph zeigt darüberhinaus, dass er bei 0 ansteigt und irgendwo zwischen 0 und 2 am steilsten ist und dann das Wachstum langsamer wird um schließlich an der Extremstelle 2 eine waagerechte Tangente zu haben. Dies Phänomen läßt sich auch mit Sekanten an den Graphen beschreiben. Auf einigen Intervallen liegt der Graph von f stets oberhalb von all seinen Sekanten, auf anderen stets unterhalb.

Konvex, Konkav, Wendepunkt:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $I \subseteq D$ ein Intervall. Gilt für alle $x_1, x_2 \in I$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

dann heißt f **konvex (linksgekrümmt) in** I.
Gilt für alle $x_1, x_2 \in I$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

dann heißt f **konkav (rechtsgekrümmt) in** I.
Die Funktion f heißt **konvex** bzw. **konkav**, wenn diese Bedingung für $I = D$ erfüllt ist.
Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt **Wendestelle** von f, wenn die Funktion an diesem Punkt ihr Konvexitätsverhalten ändert, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass f in $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ konvex (aber nicht konkav) ist, und in $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ konkav (aber nicht konvex) ist, bzw. umgekehrt. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt dann **Wendepunkt** von f.

Im Falle einer zweimal differenzierbaren Funktion läßt sich das Krümmungsverhalten anhand der zweiten

Ableitung feststellen.

Konvexitätsverhalten:
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und sei $I \subseteq D$ ein Intervall. Dann ist f in I genau dann konvex (bzw. konkav), wenn gilt

$$f''(x) \geq 0 \quad (\text{bzw. } f''(x) \leq 0) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Gibt es eine ungerade Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 3$ und

$$f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots f^{(m-1)}(x_0) = 0 \neq f^{(m)}(x_0),$$

dann besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel A: Auf Seite 370 hatten wir die zweite Ableitung berechnet:

$$g''(x) = \frac{4(x-1)(x^2-2x-2)}{(x^2-2x+2)^3}.$$

Nun ist wegen $x^2 - 2x - 2 > 0$ für alle x

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ oder } x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ oder } x = 1 + \sqrt{3} \text{ oder } x = 1 - \sqrt{3}.$$

Damit wechselt $g''(x)$ nur an diesen drei Stellen ihr Vorzeichen. Durch Einsetzen von x-Werten aus den 4 Intervallen $(-\infty, 1-\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3}, 1)$, $(1, 1+\sqrt{3})$ und $(1+\sqrt{3}, \infty)$ erhält man das Vorzeichen von $g''(x)$ und damit das Krümmungsverhalten von g auf dem jeweiligen Intervall. Wegen $\sqrt{3} \approx 1,7$ betrachten wir folgende Werte

$$g''(-1) = \frac{-8}{125} < 0, \qquad g''(0) = 1 > 0,$$

$$g''(2) = -1 < 0 \qquad g''(3) = \frac{8}{125} > 0.$$

Also ist g auf $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ sowie $(1, 1+\sqrt{3})$ konkav und auf $(1-\sqrt{3}, 1)$ sowie $(1+\sqrt{3}, \infty)$ konvex. Die Stellen $x_0 = 1-\sqrt{3}, x_1 = 1, x_2 = 1+\sqrt{3}$ sind demnach Wendestellen (da wir direkt den Wechsel des Krümmungsverhaltens festgestellt haben, müssen wir nicht mehr die nächste Ableitung überprüfen). Die Wendepunkte sind

$$\big(1-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\big), \quad (1,0), \quad \big(1+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\big)$$

Beispiel 17. Wir betrachten wieder die Funktion $f(x) = (x^2 - \frac{3}{2}x)e^x$. Die zweite Ableitung war in

Beispiel 15. berechnet worden und ist

$$f''(x) = (x^2 + \frac{5}{2}x - 1)e^x.$$

Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$ liefert die Nullstellen

$$x_0 = \frac{-5-\sqrt{41}}{4} \approx -2,85, \quad x_1 = \frac{-5+\sqrt{41}}{4} \approx 0,35.$$

Das sind also mögliche Wendestellen der Funktion f. Da nur an diesen Stellen $f''(x)$ ihr Vorzeichen ändert, könen wir wieder das Vorzeichen von $f''(x)$ auf den Intervallen $\big(-\infty, \frac{-5-\sqrt{41}}{4}\big)$, $\big(-\frac{-5-\sqrt{41}}{4}, \frac{-5+\sqrt{41}}{4}\big)$ und $\big(\frac{-5+\sqrt{41}}{4}, \infty\big)$ durch Einsetzen eines x-Wertes ermitteln:

$$f''(-3) = 0,5e^{-3} > 0, \quad f''(0) = -1 < 0,$$
$$f''(1) = 2,5 \cdot e > 0.$$

Also ist f auf $\big(-\infty, \frac{-5-\sqrt{41}}{4}\big)$ sowie auf $\big(\frac{-5+\sqrt{41}}{4}, \infty\big)$ konvex und auf $\big(-\frac{-5-\sqrt{41}}{4}, \frac{-5+\sqrt{41}}{4}\big)$ konkav. Die Wendepunkte habe die ungefähren Koordinaten

$$(-2.85,\ 0.72) \text{ und } (0.35,\ -0.57).$$

5. Asymptotisches Verhalten

Hierunter versteht man das Verhalten des Funktionsgraphen an den Rändern des Definitionsbereichs. Das ist

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ oder } \lim_{x\to\infty} f(x),$$

falls ein Intervall der Form $(-\infty, a)$ oder (b, ∞) im Definitionsbreich von f enthalten ist. Das ist aber auch das Grenzwertverhalten

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) \text{ oder } \lim_{x\nearrow x_0} f(x)$$

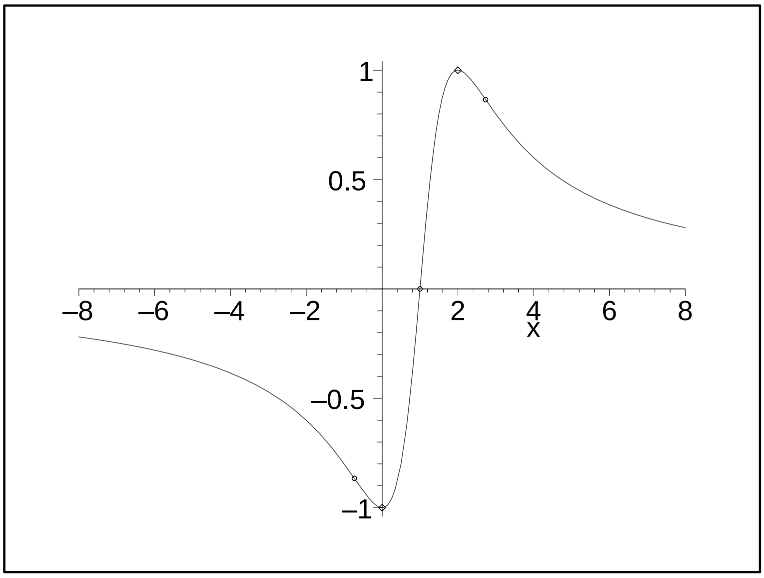
sein, falls es ein Intervall (x_0, b) oder (a, x_0) im Definitionsbereich von f gibt. Letzteres trifft typischerweise auf Definitionslücken von f zu. Die Bestimmung solcher Grenzwerte war in Abschnitt 2.6 sowie für $x \to \pm\infty$ in 5.1 behandelt worden. Hierbei können ggf. die Regeln von l'Hospital hilfreich sein.

Beispiel A: Für die Funktion g ist $D(g) = \mathbb{R}$ und es sind nur die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ zu bestimmen. Das liefert in diesem Fall

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0.$$

Jetzt haben wir genügend viel qualitative Information, um eine Skizze des Funktionsgraphen anzufertigen.

Im folgenden Bild sind die Extrema als $\diamond$ und die Wendepunkte als $\circ$ eingetragen.



Vergleichen Sie noch mal den Verlauf des Graphen mit den gefundenen Monotonie- und Krümmungsaussagen.

Beispiel 18. Ist $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$, so ist der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$. Damit sind die Grenzwerte

$$\lim_{x \searrow 0} f(x), \ \lim_{x \nearrow 1} f(x), \ \lim_{x \searrow 1} f(x), \ \lim_{x \to \infty} f(x)$$

zu untersuchen. Es ist

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \infty$$

da der Zähler gegen $-\infty$ und der Nenner gegen -1 konvergiert. Außerdem ist wegen $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0 =$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)$ nach den Regeln von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

Die Funktion hat also an der Stelle $x_0=1$ eine hebbare Definitionslücke. Schließlich ist wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=\infty=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)$ ebenfalls nach den Regeln von de l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

Der Graph bestätigt diese Rechnungen: