

5.3 Wachstumsrate und Elastizität

Ist f eine ökonomische Funktion (also z.B. Gewinn, Kosten, etc.), dann wird die Ableitung f' auch als **Grenzfunktion** (Grenzwert, Grenzkosten, etc.) bezeichnet. Denn die Ableitung liefert den Grenzwert der Änderung von $f(x)$ bei Änderung von x auf $x + h$:

$$f(x + h) - f(x) \approx f'(x)h$$

oder mit der Δ -Notation (vgl. Seite 338)

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x.$$

Beispiel 19. Seien $f(x)$ die Steuern, die auf das Einkommen x zu zahlen sind. Wächst das Einkommen um $h = 1 \text{ €}$, dann gibt die Grenzsteuer $f'(x)$ in guter Näherung an, wieviel zusätzliche Steuern für diese 1 € zu zahlen sind.

In Beispiel 1. hatten wir für die Kostenfunktion

$$K(x) = 20\sqrt{x} + 100$$

folgende Änderungen für $h = 0,01$ erhalten. Wir vergleichen sie mit der Ableitung an der jeweiligen Stelle:

x	$\frac{K(x+0,01) - K(x)}{0,01}$	$K'(x)$
10	3,161	3,162
100	1,0	1
1000	0,316	0,316

Wichtiger als absolute Änderungen sind in der Ökonomie im allgemeinen relative Änderungen, d.h.:

Wie ändert sich $f(x)$ prozentual, bezogen auf den Funktionswert an der Stelle x ?

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$ mit $f(x_0) \neq 0$. Der Ausdruck

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

heißt **Wachstumsrate oder prozentuale Änderung** der Funktion f an der Stelle x_0 . Sie entspricht der relativen (prozentualen) Änderung der Funktion f an der Stelle x_0 bezogen auf den Funktionswert $f(x_0)$.

Beispiel 20. Ein Grundkapital K_0 führt bei stetiger Verzinsung mit einem nominellen Zinsfuß $d = \frac{p}{100}$ zu einem Kapital

$$K(x) = K_0 e^{xd}$$

nach x Jahren (vgl. Seite 208). Die Wachstumsrate ist

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{dK_0 e^{xd}}{K_0 e^{xd}} = d.$$

Die Wachstumsrate ist also für jeden Zeitpunkt x gleich dem Zinsfuß.

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$ mit $f(x_0) \neq 0$. Der Ausdruck

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 \cdot f'(x_0)}{f(x_0)}$$

wird als **Elastizität** von f an der Stelle x_0 bezeichnet. Ist f eine ökonomische Funktion, dann heißt f an der Stelle x_0

starr,

wenn $\varepsilon_f(x_0) = 0$,

elastisch,

wenn $|\varepsilon_f(x_0)| > 1$,

proportional elastisch,

wenn $|\varepsilon_f(x_0)| = 1$,

unelastisch,

wenn $|\varepsilon_f(x_0)| < 1$.

Die Elastizität gibt an, wie sich eine kleine Änderung von x_0 zu einer relativen Änderung von $f(x_0)$ verstärkt. Sie ist eine Näherung für das Verhältnis von relativer (prozentualer) Änderung des Funktionswerts $f(x_0)$ zu relativer Änderung der Variablen x_0 . Dies zeigt die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}\varepsilon_f(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{h}{x_0}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{x_0 \cdot f'(x_0)}{f(x_0)}.\end{aligned}$$

Ist $|\varepsilon_f(x_0)| < 1$, so ist die relative Änderung von $f(x_0)$ kleiner als die relative Änderung von x_0 (jeweils betragsmäßig). Ist $|\varepsilon_f(x_0)| > 1$, so wirkt sich eine relative Änderung von x_0 verstärkend auf die relative Änderung von $f(x_0)$ aus. Zahlenmäßig bedeutet dies zum Beispiel:

$$\varepsilon_f(x) = 4:$$

$f(x)$ steigt um etwa 4%, wenn x um 1% steigt.

$$\varepsilon_f(x) = -3:$$

$f(x)$ fällt um etwa 3%, wenn x um 1% steigt.

$$\varepsilon_f(x) = 0,5:$$

$f(x)$ steigt um etwa 0,5%, wenn x um 1% steigt.

Beispiel 21.

1. Gegeben sei die Nachfragefunktion $N(p) = 16 - 2p$, wobei $p \in [0, 8]$ der Preis sei. Dann ist $N'(p) = -2$, und für die Preiselastizität ergibt sich

$$\varepsilon_N(p) = p \cdot \frac{N'(p)}{N(p)} = \frac{-p}{8 - p} = \frac{p}{p - 8}.$$

Die Nachfrage $N(p)$ ist elastisch, wenn $|\varepsilon_N(p)| > 1$, d.h. in diesem Fall $\varepsilon_N(p) < -1$. Dies ist genau für $p \in (4, 8)$ der Fall. Eine Erhöhung des Preises p hat für $p > 4$ somit einen relativ starken Rückgang der Nachfrage zur Folge. So ist etwa $\varepsilon_N(6) = -3$, also sinkt die Nachfrage um 3%, wenn der Preis ausgehend von $p_0 = 6$ um 1% steigt. Analog ist die Nachfrage unelastisch ist für $p < 4$. Dies bedeutet, dass für Preise kleiner als 4 eine Erhöhung des Preises zu einem relativ schwachen Rückgang der Nachfrage führt. Etwa fällt wegen $\varepsilon_N(2) = -\frac{1}{3}$ die Nachfrage nur um $\frac{1}{3}\%$, wenn der Preis ausgehend von $p_0 = 2$ um 1% steigt.

2. Die Herstellungskosten für ein Produkt setzen sich zusammen aus den fixen Kosten K_f (Maschinen etc.) und den variablen Kosten k_v (Material etc.). Die Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge x betragen demnach

$$K(x) = K_f + k_v \cdot x.$$

Die Stückkosten sind dann

$$S(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{K_f}{x} + k_v.$$

Die Elastizität der Kosten bezüglich der produzierten Menge ist

$$\varepsilon_K(x) = \frac{k_v x}{K_f + k_v x}$$

Da die Zahlen x, K_f, k_v positiv sind, liegt die Elastizität zwischen 0 und 1. Die Kosten sind also stets unelastisch. Die Elastizität der Stückkosten ist

$$\varepsilon_S(x) = \frac{-K_f}{K_f + k_v x}$$

Sie liegt stets zwischen -1 und 0 . Daher ist $S(x)$ unelastisch. Außerdem ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon_S(x) = 0$$

und daher wird der prozentuale Anstieg von $S(x)$ bei einem Anstieg von x um 1% immer kleiner wenn die Ausgangsmenge x größer wird. Das entspricht auch der Vorstellung, da die fixen Kosten bei großer Stückzahl einen immer kleiner werdenden Einfluß auf die Gesamtkosten haben.

Hat die Funktion f eine Umkehrfunktion, dann gilt

Elastizität von Umkehrfunktionen:

Mit $y = f(x)$ ist

$$\varepsilon_{f^{-1}}(y) = \frac{1}{\varepsilon_f(x)}.$$

Sei $N(p)$ eine Nachfragefunktion in Abhängigkeit vom Preis p und bezeichne mit x die nachgefragte Menge, also $x = N(p)$. Dann ist die zugehörige Erlösfunktion

$$E(x) = p \cdot x.$$

Umgekehrt hängt auch p von der nachgefragten Menge ab, das wird durch die Umkehrfunktion $p = N^{-1}(x)$ beschrieben. Für den Grenzerlös in Bezug auf die Menge folgt

$$\begin{aligned} E'(x) &= N^{-1}(x) + x(N^{-1})'(x) \\ &= N^{-1}(x) + \frac{x}{N'(N^{-1}(x))} \\ &= p + \frac{N(p)}{N'(p)} = p \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_N(p)} \right). \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang heißt in der Ökonomie auch **Amoroso-Robinson-Gleichung**.

Die Gewinnfunktion ist gegeben durch

$$G(x) = E(x) - K(x).$$

Für ein (lokales) Maximum von $G(x)$ muss $G'(x) = 0$ gelten, also:

$$K'(x) = E'(x) = p \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_N(p)} \right)$$

Da im allg. $K'(x) > 0$ und $p > 0$, muß dann $\frac{1}{\varepsilon_N(p)} > -1$ sein. Da im allg. $\varepsilon_N(p) < 0$ ist, folgt also $\varepsilon_N(p) < -1$. Ein Gewinnmaximum liegt also im allg. im elastischen Bereich der Nachfragefunktion.

Beispiel 22. In der Situation eines Monopolisten soll der Gewinn $G(p)$ in Abhängigkeit vom Preis p maximiert werden. Der Gewinn berechnet sich aus dem Erlös und den Kosten als

$$G(p) = xp - K(x).$$

Ist zum Beispiel $K(x) = 1 + x$ und $x = N(p) = 5 - p$ bei Preisen $p \in [0, 5]$, dann ist

$$G(p) = -p^2 + 6p - 6.$$

Wegen $G'(p) = -2p + 6$, $G''(p) = -2$, liegt bei $p = 3$ (und $x = N(3) = 2$) ein lokales Maximum, mit dem Gewinn $G(3) = 3$. Wegen $G(0) = -6$, $G(5) = -1$ ist dies auch ein globales Maximum.

Die Elastizität der Nachfragefunktion $N(p)$ ist

$$\varepsilon_N(p) = \frac{pN'(p)}{N(p)} = \frac{-p}{5-p} = \frac{p}{p-5}$$

und es ist $|\varepsilon_N(p)| > 1$ genau für $p > \frac{5}{2}$. Das Maximum von $G(p)$ liegt also tatsächlich im elastischen Bereich.