Kapitel 7. Integralrechnung für Funktionen einer Variablen

In diesem Kapitel sei stets $D \subseteq \mathbb{R}$, und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

7.1 Das unbestimmte Integral

(Stammfunktion)
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt eine **Stammfunktion** von f, falls gilt:

$$F' = f \; .$$

Die Funktion f heißt dann **integrierbar**.

Beispiel 1. (i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ eine Stammfunktion von f.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Dann ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 -$

$\frac{3}{2}x^2 + 5x$ eine Stammfunktion von f. Aber auch $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + 2$ ist eine Stammfunktion von f.

Achtung: Nicht jede Funktion besitzt eine Stammfunktion.

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + c$ eine Stammfunktion von $f(x)$ (c ist hier eine Konstante). Weitere Stammfunktionen gibt es nicht, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Sind F, G Stammfunktionen von f, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = F(x) + \mathrm{c} \quad \text{für alle } x \in I.$$

Mit $F(x)$ ist auch jede Funktion $F(x) + c$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Es gilt also:

Hat die Funktion f eine Stammfunktion F, dann ist die Menge

$$\{F + \mathrm{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Stammfunktionen von f.

Der Begriff "unbestimmtes Integral" bedeutet nichts anderes als "Stammfunktion":

(Unbestimmtes Integral)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt. Dann bezeichnet das Symbol

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

eine beliebige Stammfunktion von f, und es wird **unbestimmtes Integral der Funktion** f genannt. Sprechweise: "Integral von $f(x)\,\mathrm{d}x$." Manchmal wird auch

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

geschrieben, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Das unbestimmte Integral ist also nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf eine (additive) Konstante.

Es gilt also nach Definition für jede differenzierbare

Funktion F:

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathrm{c}\,.$$

Beispiel 2. Es soll eine Funktion $s(x)$ zur Berechnung der Einkommensteuer mit den folgenden Eigenschaften gefunden werden:

(i) $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist stetig.

(ii) Das Existenzminimum ist steuerfrei:

$$s(x) = 0 \text{ für } x \in [0, 10000].$$

(iii) Der Grenzsteuersatz steigt linear bis zu einer gegebenen Einkommensgrenze:

$$s'(x) = \frac{x}{200000} + \frac{1}{20} \text{ für } x \in [10000, 120000].$$

(iv) Der *Grenzsteuersatz* ist für große Einkommen konstant:

$$s'(x) = 0.65 \text{ für } x \geq 120000.$$

Den Steuersatz für $x \in [10000, 120000]$ erhalten wir als unbestimmtes Integral über den Grenzsteuersatz:

$$s(x) = \int \left(\frac{x}{200000} + \frac{1}{20} \right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{400000} + \frac{x}{20} + c_1$$

Aus der Stetigkeit von $s(x)$ an der Stelle $x = 10000$ folgt, dass die Konstante als $c_1 = -750$ zu wählen ist. Insbesondere ist dann $s(120000) = 41250$.

Den Steuersatz für $x \geq 120000$ erhalten wir ebenso als unbestimmtes Integral über den Grenzsteuersatz:

$$s(x) = \int 0.65 \, \mathrm{d}x = 0.65 \cdot x + c_2$$

Aus der Stetigkeit von $s(x)$ an der Stelle $x = 120000$ folgt, dass die Konstante als $c_2 = -36750$ zu wählen ist.

Die gesuchte Steuerfunktion $s(x)$ hat also die Form

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 10000] \\ \dfrac{x^2}{40000} + \dfrac{x}{20} - 750 & \text{für } x \in [10000, 120000] \\ 0.65 \cdot x - 36750 & \text{für } x \geq 120000 \end{cases}$$

Wir haben erwähnt (siehe Seite 448), dass nicht jede Funktion eine Stammfunktion haben muss. Es gilt aber:

Satz 2 Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann besitzt f eine Stammfunktion

Da viele der von uns untersuchten Funktionen stetig sind, haben sie Stammfunktionen. Wir listen im folgenden einige auf, wobei wir stets auf die Angabe der Konstante c verzichten. D bezeichnet den Definitionsbereich.

$f(x)$	D	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	
x^n	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}_0$
x^α	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	
$\mathrm{e}^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$
a^x	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}\,a^x$	$a > 0,\ a \neq 1$

$f(x)$	D	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$	$-\ln(\lvert\cos x\rvert)$
$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\ln(\lvert\sin x\rvert)$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\cot x$

$f(x)$	D	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	$\arcsin x$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	$\arccos x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$
$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arccot}\ x$

Aus der Umkehrung von Differenziationsregeln ergeben sich nun Integrationsregeln, zum Beispiel

Haben $f, g : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen, dann gilt:

$$\int \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Grundsätzlich kann man sagen, dass die Integration schwieriger ist als die Differenziation, die man doch sehr “nach Kochrezept” durchführen kann.

Wir geben hier die wichtigen Regeln der *partiellen Integration*, der *Integration durch Substitution* sowie die *Integration rationaler Funktionen* an (jeweils mit Beispielen). Es sei aber fairerweise zugegeben, dass man heutzutage zum Integrieren fast immer "Computeralgebrasysteme" (CAS) benutzt. Wichtiger, als perfekte Integrierer zu werden, ist es zu verstehen, was das unbestimmte Integral ist (nämlich eine Stammfunktion), und dass es viele Stammfunktionen gibt, die sich aber alle nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Wenn Ihnen das klar ist, dürfen Sie beim Integrieren ruhig dem Computer vertrauen.

Partielle Integration.

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beispiel 3. Gesucht ist $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.
Setze $f(x) = \ln x$ und $g(x) = x$. Dann ist $g'(x) = 1$,

und mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned}\int \ln x \,\mathrm{d}x &= \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= \ln x\cdot x - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= \ln x \cdot x - x + c \\ &= x\,(\ln x - 1) + c,\end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, wie immer, eine beliebige Konstante ist.

Dieses Beispiel läßt sich verallgemeinern, um eine Stammfunktion zu $\ln x \cdot x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ zu berechnen. Wir geben hier nur das Ergebnis an:

$$\boxed{\int \ln x \cdot x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + c.}$$

Beispiel 4. Gesucht ist $\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x$. Seien $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \mathrm{e}^x$, also $g'(x) = \mathrm{e}^x$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x &= \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\textstyle\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \sin x - \textstyle\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \left(\mathrm{e}^x \cos x + \textstyle\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x - \textstyle\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Also

$$2 \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x + c$$

und somit

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

Integration durch Substitution

Es handelt sich hier um die Umkehrung der Kettenregel:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$. Sei $g : D \to I$ eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall D. Dann gilt

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x) \,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Beispiel 5. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F, D ein Intervall und $g : D \to I$ differenzierbar. Dann kann man mit der obigen Substitutionsregel die folgenden unbestimmten Integrale bestimmen (die Konstante c ist wieder weggelassen):

(i) $$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b), \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

(ii) $$\int \left(g(x)\right)^n g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\left(g(x)\right)^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

(iii) $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(|g(x)|\right).$

(iv) $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{(g(x))^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)\,(g(x))^{n-1}},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

(v) $\displaystyle\int g'(x)\,\mathrm{e}^{g(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{g(x)}.$

Beispiel 6. (i) Gesucht ist $\displaystyle\int \frac{2}{3x-1}\mathrm{d}x.$

Sei $g(x) = 3x - 1$, dann ist $g'(x) = 3$ und daher

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2}{3x-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{3}\,\frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\ln\left(|g(x)|\right) + \mathrm{c} \\
&= \frac{2}{3}\ln\left(|3x-1|\right) + \mathrm{c} \\
&= \ln\sqrt[3]{(3x-1)^2} + \mathrm{c}.
\end{aligned}
$$

(ii) Gesucht ist $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x.$

Sei $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^2$, also $g'(x) = 2x$ und $F(x) = e^x$. Dann ist

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int f(g(x)) \cdot \frac{1}{2} g'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} F(g(x)) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \mathrm{c}$$

Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen lassen sich mit Hilfe der Partialbruchzerlegung immer so umformen, dass sich eine Stammfunktion mit den bis jetzt bereitgestellten Verfahren ermitteln läßt. Wir betrachten also eine rationale Funktion f von der Form $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen $P(x), Q(x)$, wobei grad$P <$ grad$Q$ gelte. Es sei hier der Fall betrachtet, dass das Nennerpolynom grad$Q$ reelle Nullstellen hat, also $Q(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_k)^{m_k}$ mit verschiedenen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Dann hat die Partialbruchzerlegung die Form (vgl. Seite 153)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(x - x_i)^j}$$

mit $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Also treten als Summanden rechts nur Ausdrücke der Form $\frac{b}{(x-a)^j}$ mit $j \in \mathbb{N}$ auf.
Für $j = 1$ ist

$$\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b \cdot \ln(|x-a|) + c$$

Für $j \geq 2$ ist

$$\int \frac{b}{(x-a)^j}\,\mathrm{d}x = \frac{-b}{(j-1)(x-a)^{j-1}} + c$$

Wir illustrieren dies an einem Beispiel:

Beispiel 7. Sei $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 5x + 4}{x^3 - 3x + 2}$. Wir wollen $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bestimmen. Da das Nennerpolynom einen kleineren Grad als das Zählerpolynom hat, führen wir zunächst eine Division mit Rest durch; dies liefert:

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 5x + 4}{x^3 - 3x + 2} = x + \frac{3x + 4}{x^3 - 3x + 2}\,.$$

Das Nennerpolynom hat $x_1 = 1$ als Nullstelle mit Vielfachheit $m_1 = 2$ und $x_2 = -2$ als Nullstelle mit

Vielfachheit $m_2 = 1$. Also ist der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{3x+4}{x^3-3x+2} = \frac{3x+4}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{c_{11}}{x-1} + \frac{c_{12}}{(x-1)^2} + \frac{c_2}{x+2}$$

Nach Multiplikation mit dem Nennerpolynom $Q(x)$ und Koeffizientenvergleich erhalten wir die Gleichungen

$$0 = c_{11} + c_2, \quad 3 = c_{11} + c_{12} - 2c_2, \quad 4 = -2c_{11} + 2c_{12} + c_2.$$

Als Lösungen ergeben sich daraus:

$$c_{11} = \frac{2}{9}\,,\ c_{12} = \frac{7}{3}\,,\ c_2 = -\frac{2}{9}\,.$$

Damit erhalten wir für das gesuchte Integral

$$
\begin{aligned}
&\int f(x)\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{3x+4}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{7}{3}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{2}{9}}{x+2} \right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{9}\cdot\ln(|x-1|) - \frac{7}{3(x-1)} - \frac{2}{9}\cdot\ln(|x+2|) + c \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{7}{3(x-1)} + \ln\sqrt[9]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2} + c
\end{aligned}
$$