7.2 Das bestimmte Integral

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a,b]$ definierte Funktion. Wenn $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion ist, d.h. $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

das **bestimmte Integral** von f über dem Intervall $[a,b]$. Weiter heißt x die **Integrationsvariable**, $f(x)$ der **Integrand**, und a, b heißen (untere und obere) **Integrationsgrenzen**. Wir sagen, die Funktion ist auf dem Intervall $[a,b]$ **integrierbar**. Ist f auf $[a,b]$ und auf $[b,c]$ integrierbar, so nennen wir f auch auf $[a,c]$ integrierbar mit

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

In diesem Fall muss die Funktion f auf $[a,c]$ keine Stammfunktion haben!

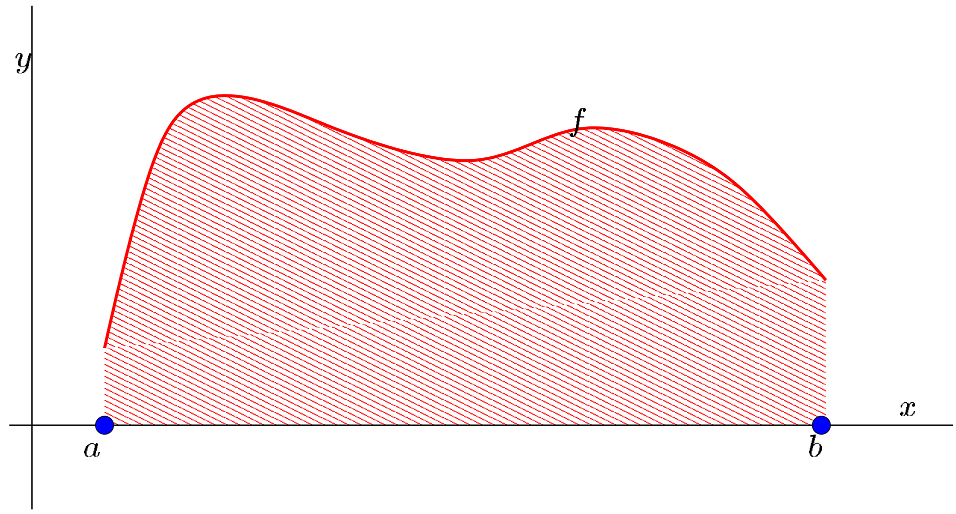
Warnung: Diese Definition stimmt nicht mit der in vielen Mathematikbüchern gegebenen Definition der

Riemann-Integrierbarkeit überein. Für alle in der Ökonomie auftretenden Funktionen, insbesondere für alle stetigen Funktionen, stimmt unsere Definition aber mit der Definition der Riemann-Integrierbarkeit überein.

Die anschaliche Bedeutung des Integrals ist die einer Fläche. Wir nehmen $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ an. Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die durch den Graphen der Funktion und die x-Achse begrenzt wird.

Wir benutzen im folgenden für $F(b) - F(a)$ auch die Bezeichnung

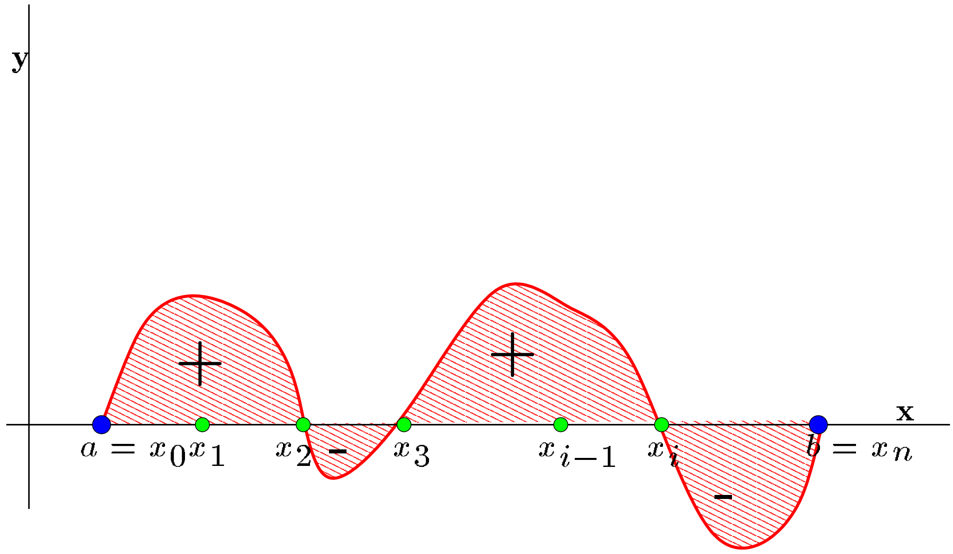
$$F(x)\Big|_a^b$$



Man kann zeigen, daß dieser Flächeninhalt für <u>stetige</u> Abbildungen f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ genau $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ ist. Gilt $f(x) \leq 0$ für alle

$x \in [a, b]$, dann ist das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$ und der negative Wert des Integrals ist der Flächeninhalt.

Ist f in einigen Bereichen negativ, so werden die entsprechenden Bereiche im Integral negativ gewichtet.



Das Integral ist also die Summe der Flächeninhalte oberhalb der x-Achse minus den Flächeninhalten unterhalb der x-Achse.

Die Berechnung des bestimmten Integrals ist in allen uns interessierenden Fällen im Prinzip nicht schwieriger als die Berechnung unbestimmter Integrale: Es geht “nur” darum, Stammfunktionen zu bestimmen.

Beispiel 8. (i)

$$\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\int_2^3 \frac{1}{t-1} + t \, \mathrm{d}t = (\ln(t-1) + \frac{t^2}{2})\Big|_2^3 = \frac{5}{2} + \ln 2 \approx 3,2$$

(iii) Sei $f(x) = \ln x$. Dann ist $F(x) = x \ln x - x$ eine Stammfunktion von f. Also ist

$$\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^2 = F(2) - F(1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0,4 \; .$$

(iv) Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 \; .$$

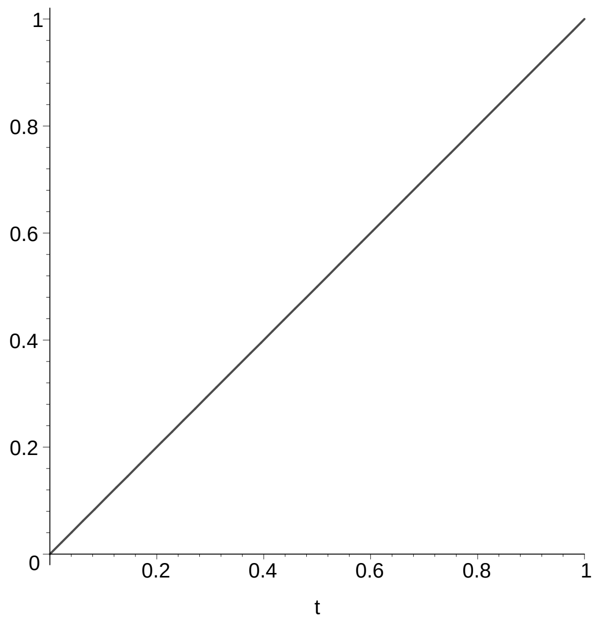
(v) Sei $f(x) = \sin(x)$, dann ist

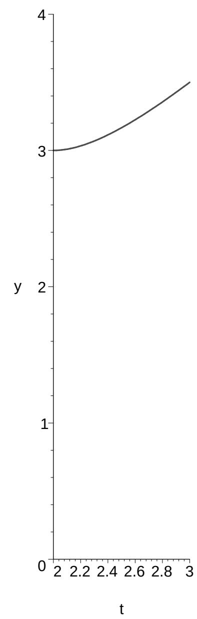
$$\int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^{2\cdot\pi} = 0$$

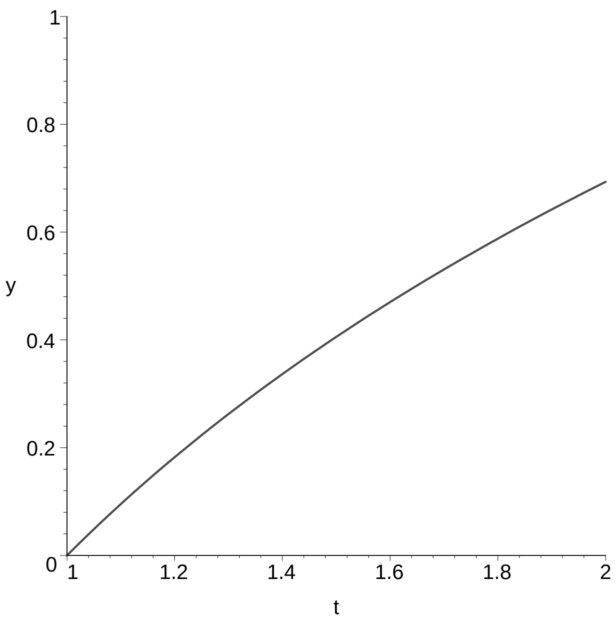
(vi) Sei $f(x) = \cos(x)$, dann ist

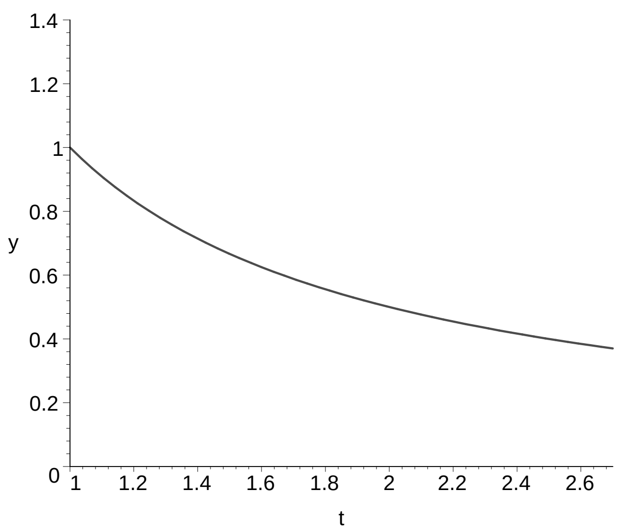
$$\int_0^{3\pi/2} f(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_0^{3\pi/2} = -1$$

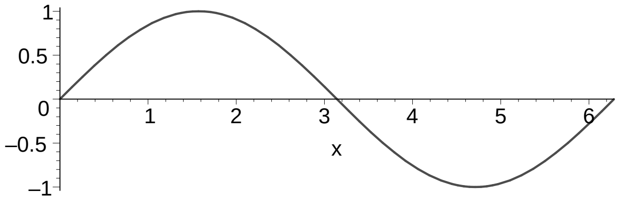
In der folgenden Skizze sind die Graphen dieser Funktionen gezeichnet (in der Reihenfolge (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) von links oben nach rechts unten). Machen Sie sich in jedem Fall bitte klar, welchen Flächeninhalten das Integral entspricht.



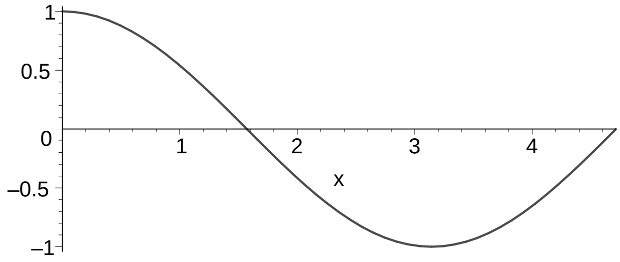








1
0.5
0
–0.5
–1
1
2
3
4
5
6
x



1
0.5
0
–0.5
–1
1
2
3
4
x

(Eigenschaften bestimmter Integrale)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

- Ist $a > b$, dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

- Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine weitere integrierbare Funktion. Ist $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Es ist nicht ganz einfach, sich die Bedeutung des Integrals klarzumachen, wenn es nicht um eine Flächenberechnung geht. Es geht vielleicht so: Sie berechnen zu einem Zeitpunkt $t = a$ einen Funktionswert $F(a)$. Das kann z.B. die Anzahl Arbeiter sein, die ein Betrieb beschäftigt, aber auch die Menge des in einem Lager vorrätigen Erdöls. Wenn Sie nun zu jedem Zeitpunkt $t \in [a, b]$ wissen, wie sich F ändert, wenn Sie also $F'(t)$ kennen, dann kann man sich fragen, was denn $F(b)$ ist. Wir nennen $F'(t) = f(t)$. Anschaulich ist klar, dass man $F(b)$ bestimmen kann, denn $F(a)$ ist ja bekannt und die Änderungen sind auch bekannt! Mathematisch ist dies (im wesentlichen) das Integral, denn

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Das bestimmte Integral auf dem Intervall $[a, b]$ der Grenzfunktion (Ableitung) einer Funktion F ist die Differenz $F(b) - F(a)$.

Beispiel 9. Die momentane Nachfrage nach einem Gut werde durch die Funktion $f(t) = \dfrac{1000}{(1+t)^2}$ beschrieben. Die momentane Nachfrage ist die Grenzfunktion der Gesamtnachfragefunktion. Die Gesamtnachfrage $F(T)$ für einen Zeitraum $[0,T]$ ist gegeben durch

$$F(t) = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1000}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Um diese Gesamtnachfrage zu berechnen, bestimmen wir zunächst eine Stammfunktion von f. Mit $g(t) = 1+t$ erhalten wir:

$$\int_0^T \frac{1000}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1000 \int_0^T \frac{g'(t)}{(g(t))^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1000}{g(t)} + c$$

Also ist

$$\int_0^T \frac{1000}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1000}{1+t}\bigg|_0^T = \frac{1000\,T}{1+T}$$

Sind in einem Lager zunächst $a < 1000$ Stücke des Gutes vorhanden, so ist das Lager leer zum Zeitpunkt T mit

$$a = \frac{1000\,T}{T+1}\,, \text{ d.h. zum Zeitpunkt } T = \frac{a}{1000-a}$$

7.3 Uneigentliche Integrale

Ist eine der Integrationsgrenzen unendlich oder ist die zu integrierende Funktion an den Integrationsgrenzen unbeschränkt, dann sprechen wir von uneigentlichen Integralen. Drei Fälle sind zu unterscheiden:

(Uneigentliche Integrale I)
Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, so schreiben wir dafür

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analog wird das Integral $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für eine Funktion $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ definiert.

Beispiel 10. Gesucht ist, falls existent, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Es ist

$$\int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{-1}{x}\right|_1^R = 1 - \frac{1}{R}\,.$$

Also erhalten wir

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

(Uneigentliche Integrale II)
Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, dann schreiben wir dafür

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analog wird das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für eine Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ definiert.

Beispiel 11. Gesucht ist, falls existent, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Es ist

$$\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_{\epsilon}^{1} = 2\left(1 - \sqrt{\epsilon}\right).$$

Also erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

(Uneigentliche Integrale III)
Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei nun $c \in (a, b)$. Falls die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

existieren, dann schreiben wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 12. Wir bestimmen

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\searrow -1}\int_\alpha^0 \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x+\lim_{\beta\nearrow 1}\int_0^\beta \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\lim_{\alpha\searrow -1}\left(\arcsin(0)-\arcsin(\alpha)\right)\\
&\qquad+\lim_{\beta\nearrow 1}\left(\arcsin(\beta)-\arcsin(0)\right)\\
&=-\lim_{\alpha\searrow -1}\arcsin(\alpha)+\lim_{\beta\nearrow 1}\arcsin(\beta)\\
&=-(-\tfrac{\pi}{2})+\tfrac{\pi}{2}=\pi.
\end{aligned}
$$