

Fakultät für Mathematik  
Institut für Algebra und Geometrie  
Prof. Dr. A. Pott, Dr. M. Höding

### **Modulprüfung Mathematik II**

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,  
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik  
WS 2009/2010  
20.07.2009

Name	Vorname	Fachrichtung	Matrikelnummer

Anzahl der abgegebenen Blätter	
--------------------------------	--

### **Punktebewertung der Klausur**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte						
Punkte						

Gesamtpunktzahl der Klausur = 50	Note

**Viel Erfolg!**

**Bitte beachten Sie folgende Hinweise!**

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und numerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

### Aufgabe 1

Gegeben ist die Gruppe  $G = (M, \circ)$  mit  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  und folgender Gruppentafel:

$\circ$		1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	2	3	4	5	6	7	8
2		2	3	4	1	8	5	6	7
3		3	4	1	2	7	8	5	6
4		4	1	2	3	6	7	8	5
5		5	6	7	8	1	2	3	4
6		6	7	8	5	4	1	2	3
7		7	8	5	6	3	4	1	2
8		8	5	6	7	2	3	4	1

- (a) Bestimmen Sie für die Elemente 3 und 4 die Ordnung und das inverse Element.
- (b) Geben Sie zwei Untergruppen von  $G$  mit zwei Elementen an.
- (c) Gibt es Untergruppen mit drei Elementen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d)  $G^* = (M^*, \circ)$  mit  $M^* = \{1, 2, 3, 4, \}$  ist Normalteiler von  $G$ . Beschreiben Sie die Faktorgruppe  $G/G^*$ .
- (e) Zeigen Sie die Isomorphie von  $G^* = (M^*, \circ)$  zur Gruppe  $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ .

### Aufgabe 2

In einem Körper  $\mathbb{K}$  wird die Gleichung  $x^3 - 8x^2 + 25x = 0$  betrachtet.

- (a) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
- (b) Lösen Sie die Gleichung für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
- (c) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung für  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ .

### Aufgabe 3

Gegeben seien die Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{a \ln x}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Bestimmen Sie die Werte von  $a \in \mathbb{R}$  so, dass  $f(x)$  in  $x = e$  einen Extremwert hat.
- (b) Berechnen Sie für  $a = 1$  den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot f(x)$ .

#### Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = (x - 1)e^x$ .

- (a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Grades.
- (b) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe  $T_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} x^n$  die Taylorreihe der Funktion  $f$  an der Stelle  $x^* = 0$  ist.
- (c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe  $T_\infty(x)$ .

#### Aufgabe 5

- (a) Bestimmen Sie mithilfe der Substitution  $t^2 = x$  eine Stammfunktion der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

- (b) Berechnen Sie z. B. mithilfe der partiellen Integration

$$\int_1^e x \ln x \, dx.$$

#### Aufgabe 6

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = (x^2 - y)e^{2x-y}$ .

- (a) Berechnen Sie den Gradienten  $\text{grad } f(x, y)$  von  $f$ .
- (b) Bestimmen Sie die Punkte  $(x_i, y_i)$  für die  $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)$  gilt.