15 Fourierreihen

Definition 15.1 (Trigonometrisches Polynom)**.** Sei $T > 0$ und $\omega = 2\pi/T$. Eine Funktion $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\,\omega\,x) + b_k \sin(k\,\omega\,x))$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ heißt *trigonometrisches Polynom* vom Grad n.

Bemerkung 15.2. *T_n ist periodisch mit Periode T, d.h.*

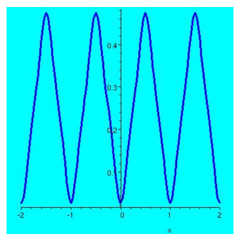
$$T_n(x+T) = T_n(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es genügt daher solch ein Polynom auf dem Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (oder auch $[0,T]$) zu untersuchen.

Beispiel 15.3.

$$T_3(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos(2\,\pi\,x) - \frac{2}{9\pi^2}\cos(6\pi\,x)$$

ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad 3 mit $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{2}{\pi^2}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{2}{9\pi^2}$ und $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Die Periode beträgt 1.



$T_3(x)$

Definition 15.4 (Fourierpolynom[40], Fourierkoeffizienten)**.** Sei $T > 0$ und $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, und sei $n \in \mathbb{N}$.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 0, \dots, n$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 1, \dots, n$$

heißen die *Fourierkoeffizienten* von f, und

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\,\omega\,x) + b_k \sin(k\,\omega\,x))$$

heißt das *Fourierpolynom* n-ten Grades von f. Hierbei ist wieder $\omega = 2\pi/T$.

Satz 15.5. *Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $T > 0$ und $\omega = 2\pi/T$. Dann gilt:*

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\,\omega\,x)\,\cos(l\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\,\omega\,x)\,\sin(l\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} T/2 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases},$$

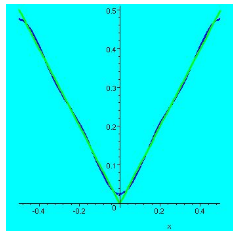
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

[40] Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830

Satz 15.6. *Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, so ist $b_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, und ist $f(x)$ eine ungerade Funktion so ist $a_k = 0$, $k = 0, \dots, n$.*

Beispiel 15.7. Das Fourierpolynom 3-ten Grades der Funktion $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist das Polynom (siehe (15.3))

$$F_3(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos(2\,\pi\,x) - \frac{2}{9\pi^2}\cos(6\pi\,x).$$



$F_3(x)$

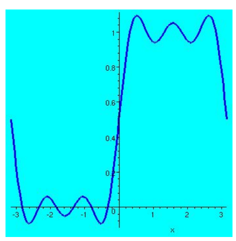
Definition 15.8 (Fourierreihe)**.** Sei $T > 0$, $\omega = 2\pi/T$, und sei $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit Fourierkoeffizienten a_k, b_k. Dann heißt

$$F_\infty(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\,\cos(k\,\omega\,x) + b_k\,\sin(k\,\omega\,x))$$

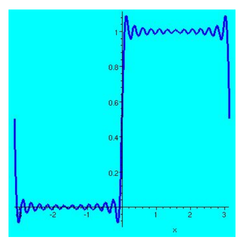
die *Fourierreihe* von f.

Beispiel 15.9. Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1$ für $t > 1$ und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$. Dann ist

$$F_\infty(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k\,\pi}\sin(k\,x).$$



$F_5(x)$



$F_{25}(x)$

Definition 15.10 (Skalarprodukt und Norm von Funktionen)**.** Sei $C[a, b]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Für $f, g \in C[a, b]$ sei

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x, \text{ und } \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Bemerkung 15.11. *$\langle f, g\rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $C[a, b]$ (siehe (7.25)) und $\|f\|$ eine Norm (siehe (7.28)).*

Satz 15.12. *Die Funktionen*

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}, \frac{\cos(k\,x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(k\,x)}{\sqrt{\pi}}, \ k \in \mathbb{N}$$

bilden ein Orthonormalsystem (siehe (7.40) und Satz 15.5) in $C[-\pi, \pi]$. Insbesondere gilt für $g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k\,\cos(k\,x) + d_k\,\sin(k\,x))$

$$\|g\|^2 = \pi\left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k^2 + d_k^2)\right).$$

Satz 15.13 (Approximation durch Fourierpolynome). *Sei $f \in C[-\pi, \pi]$ mit Fourierpolynom F_n, und sei T_n ein beliebiges trigonometrisches Polynom vom Grad n. Dann gilt*

i) $\|f - F_n\| \leq \|f - T_n\|$.

ii) $\|f - F_n\|^2 = \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)$.

iii) $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|^2 = 0$ *(Konvergenz der Fourierreihe im quadratischen Mittel gegen f).*

iv) *Ist f in $x^\star$ differenzierbar, dann gilt $F_\infty(x^\star) = f(x^\star)$.*

v) $\|f\|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right)$ *(Parsevalsche Gleichung).*

16 Differenzierbarkeit II

Definition 16.1 (Reellwertige Funktion mehrerer Variablen)**.** Eine (reellwertige) *Funktion von mehreren* Variablen ist eine Abbildung

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

wobei D eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Statt $(x_1, \dots, x_n)$ wird auch oft $\mathbf{x}$ geschrieben, und so $f(\mathbf{x})$ anstelle von $f(x_1, \dots, x_n)$.

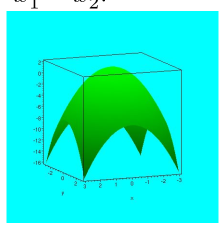
Bemerkung 16.2. *Für eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist der Graph*

$$\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in D\}$$

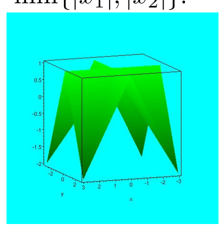
ein 3-dimensionales Gebilde (Gebirge). I.A. für $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein $(n+1)$-dimensionales Gebilde.

Beispiel 16.3.

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$.



ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = 1 - \min\{|x_1|, |x_2|\}$.



Definition 16.4 (Grenzwert einer Folge von Vektoren)**.** Eine Folge $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, heißt *konvergent gegen* $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n$, bezeichnet als $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$, falls der Abstand zwischen $\mathbf{x}_k$ und $\mathbf{x}^\star$

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^\star\| = \sqrt{(\mathbf{x}_{k,1} - \mathbf{x}_1^\star)^2 + (\mathbf{x}_{k,2} - \mathbf{x}_2^\star)^2 + \cdots + (\mathbf{x}_{k,n} - \mathbf{x}_n^\star)^2}$$

gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^\star\| = 0.$$

Man schreibt auch $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}^\star$.

Bemerkung 16.5. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$ *ist also gleichbedeutend damit, dass jede Koordinate $\mathbf{x}_{k,i}$ gegen $\mathbf{x}_i^\star$ konvergiert, $0 \le i \le n$. Insbesondere übertragen sich die Eigenschaften von Folgen reeller Zahlen aus Kapitel 10 in „kanonischer Weise“ auf Folgen von Vektoren (s. z.B. Satz 10.12, Satz 10.15).*

Definition 16.6 (Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n$. Wenn es ein $y^\star \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $\mathbf{x}_k \in D \setminus \{\mathbf{x}^\star\}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$$

gilt, dass die Folge der Funktionswerte $(f(\mathbf{x}_k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $y^\star$ konvergiert, also

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = y^\star,$$

dann heißt $y^\star$ *der Grenzwert von f für $\mathbf{x}$ gegen $\mathbf{x}^\star$*. Man schreibt dafür

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} f(\mathbf{x}) = y^\star.$$

Hierbei ist auch $y^\star = \pm\infty$ erlaubt, und man spricht dann von bestimmter Divergenz (vgl. Def. 11.16).

Definition 16.7 (Stetigkeit)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $\mathbf{x}^\star \in D$. f heißt *stetig im Punkt (an der Stelle)* $\mathbf{x}^*$, falls

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*),$$

d.h. der Grenzwert $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} f(\mathbf{x})$ existiert und ist gleich $f(\mathbf{x}^\star)$. Dies bedeutet, für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\mathbf{x}_k \in D \setminus \{\mathbf{x}^\star\}$, mit $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}^\star).$$

Ist die Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches D stetig, dann heißt f *stetig* (vgl. Def. 11.25).

Bemerkung 16.8. *Auch bei den Definitionen 16.6 und 16.7 für eine Funktion mehrerer Variablen lassen sich die bekannten Eigenschaften von Grenzwerten und Stetigkeit einer Funktion einer Veränderlichen (s. z.B. Satz 11.21 oder Satz 11.25) in „kanonischer Weise“ verallgemeinern.*

Satz 16.9. *Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n$ stetig sind. Dann sind auch die Funktionen*

$$\begin{aligned}&\alpha f(\mathbf{x}) \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}),\\ &\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}, \text{ falls } g(\mathbf{x}^\star) \neq 0,\end{aligned}$$

stetig in $\mathbf{x}^\star$.

Definition 16.10 (Vektorwertige Funktion)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Unter einer (vektorwertigen) Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ versteht man die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x}))$, wobei $\mathbf{f}_i : D \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, reellwertige Funktionen sind.

Bemerkung 16.11.

i) *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beschreibt eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (vgl. Satz 7.5).*

ii) *Im Falle $n = 1$ erhält man gerade (parameterisierte) Kurven (vgl. Def. 14.39).*

Definition 16.12 (Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, und sei $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n$. Wenn es ein $\mathbf{y}^\star \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathbf{x}_k \in D \setminus \{\mathbf{x}^\star\}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$$

gilt, dass die Folge der Funktionswerte $(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $\mathbf{y}^\star$ konvergiert, also

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}^\star,$$

dann heißt $\mathbf{y}^\star$ *der Grenzwert von $\mathbf{f}$ für $\mathbf{x}$ gegen $\mathbf{x}^\star$*. Man schreibt dafür

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^\star.$$

Mit anderen Worten: $\mathbf{y}^\star$ ist der Grenzwert von $\mathbf{f}$ für $\mathbf{x}$ gegen $\mathbf{x}^\star$ genau dann, wenn $\mathbf{y}_i^\star$ der Grenzwert von $\mathbf{f}_i$ für $\mathbf{x}$ gegen $\mathbf{x}^\star$ und für $1 \le i \le m$ ist (vgl. Def. 16.6).

Definition 16.13 (Stetigkeit)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, und sei $\mathbf{x}^\star \in D$. $\mathbf{f}$ heißt *stetig im Punkt (an der Stelle)* $\mathbf{x}^*$, falls

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*),$$

d.h. der Grenzwert $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existiert und ist gleich $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)$. Dies bedeutet, für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\mathbf{x}_k \in D \setminus \{\mathbf{x}^\star\}$, mit $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star).$$

Ist die Funktion $\mathbf{f}$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches D stetig, dann heißt $\mathbf{f}$ *stetig*. Mit anderen Worten: $\mathbf{f}$ ist genau dann in $\mathbf{x}^\star$ stetig, wenn jede Funktion $\mathbf{f}_i : D \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, in $\mathbf{x}^\star$ stetig ist (vgl. Def. 16.7).

Definition 16.14 (ε-Umgebung, offene Menge)**.**

i) Für $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$B(x^\star, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star\| < \varepsilon\}$$

ε-Umgebung von $\mathbf{x}^\star$. Geometrisch ist dies die „offene Kugel mit Radius ε und Mittelpunkt $\mathbf{x}^\star$“.

ii) Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, falls es für alle $\mathbf{x}^\star \in D$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B(x^\star, \varepsilon) \subseteq D$.

Bemerkung 16.15. *Um nun (zunächst) für Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einen Ableitungsbegriff zu definieren, greifen wir die geometrische Interpretation im Falle $n = 1$ (s. Bem. 12.3) auf. Anstatt die Funktion (bzw. ihren Graphen) durch eine Tangente zu approximieren, möchten wir nun f an einer Stelle $\mathbf{x}^\star$ durch eine Hyperebene approximieren (s. Bem. 6.9).*

Definition 16.16 (Partielle Ableitung(en))**.** Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, eine Funktion und $\mathbf{x}^\star \in D$.

i) Unter der *partiellen Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^\star)$ *von f nach x_i* in einem Punkt $\mathbf{x}^\star$ versteht man die Ableitung von f nach der Variablen x_i, während die übrigen Variablen als Konstante betrachtet werden. Formell bedeutet dies, dass der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^\star) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}^\star + h\,\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^\star)}{h}$$

existieren muss, wobei $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\intercal$ den i-ten Einheitsvektor bezeichnet (s. Def. 6.23).

ii) Ist f in jedem Punkt $\mathbf{x}^\star \in D$ partiell nach x_i differenzierbar, dann heißt f *partiell nach x_i differenzierbar*, und die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

heißt *partielle Ableitung von f nach x_i*.

iii) Ist f partiell nach x_i differenzierbar für $1 \leq i \leq n$, dann heißt f *partiell differenzierbar*.

iv) *f heißt stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ stetig sind.

Bemerkung 16.17. *Im Gegensatz zu Satz 12.5 sind partiell differenzierbare Funktionen nicht notwendigerweise stetig.*

Definition 16.18 (Gradient)**.** Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, eine partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$$

Gradient von f im Punkt $\mathbf{x}$.

Bemerkung 16.19. *Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, partiell differenzierbare Funktionen. Dann gilt die Produktregel (vgl. Satz 12.6 iii))*

$$\operatorname{grad}(f \cdot g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} g(\mathbf{x}).$$

Definition 16.20 (Höhere partielle Ableitungen)**.** Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, eine partiell differenzierbare Funktion. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ selbst wieder partiell differenzierbar, so heißt f zweimal partiell differenzierbar, und man schreibt statt $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

für die partielle Ableitung nach x_j der partielle Ableitung nach x_i.
Entsprechend sind höhere (k-te) partielle Ableitung definiert

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Satz 16.21 (Schwarz[41])**.** *Ist $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt für $1 \leq i, j \leq n$*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Entsprechende Aussagen gelten für höhere (k-te) partielle Ableitungen, wenn f eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist.

Definition 16.22 ((totale) Differenzierbarkeit)**.** Sei $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, eine Abbildung. $\mathbf{f}$ heißt in $\mathbf{x}^\star \in D$ *(total) differenzierbar*, falls es eine Matrix $A(\mathbf{x}^\star) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + A(\mathbf{x}^\star)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star) + r(\mathbf{x})$$

mit

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^\star} \frac{r(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star\|} = 0.$$

$A(\mathbf{x}^\star)$ heißt die *Ableitung oder Differential von* $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}^\star$.

Definition 16.23 (Jacobi[42]-Matrix)**.** Sei $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, eine partiell differenzierbare Abbildung, d.h. alle Koordinaten-Funktionen $\mathbf{f}_i$ sind partiell differenzierbar, und sei $\mathbf{x}^\star \in D$. Die $(m \times n)$-Matrix

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^\star) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^\star) \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^\star) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^\star) \end{pmatrix}$$

heißt *Jacobi-Matrix* oder auch *Funktional-Matrix*.

Bemerkung 16.24. *Ist $m = 1$, dann ist $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^\star) = \operatorname{grad} \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star)$.*

Satz 16.25. *Sei $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, und sei $\mathbf{x}^\star \in D$.*

i) *Ist $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}^\star$ differenzierbar mit Ableitung $A(\mathbf{x}^\star)$. Dann ist $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}^\star$ stetig und es ist $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^\star) = A(\mathbf{x}^\star)$.*

[41] Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921
[42] Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851

ii) *Ist* $\mathbf{f}_i$ *in* $\mathbf{x}^\star$ *stetig partiell differenzierbar für* $1 \leq i \leq m$, *dann ist* $\mathbf{f}$ *in* $\mathbf{x}^\star$ *differenzierbar.*

Korollar 16.26. *Ist* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D *offen, stetig partiell differenzierbar, dann ist* f *stetig.*

Satz 16.27 (Kettenregel (vgl. Satz 12.6 v))). *Sei* $\mathbf{g} : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, C *offen, in* $x^\star \in C$ *differenzierbar, und sei* $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, D *offen, mit* $\mathbf{g}(C) \subseteq D$, *und es sei* $\mathbf{f}$ *in* $\mathbf{g}(\mathbf{x}^\star)$ *differenzierbar. Dann ist die Verknüpfung* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : C \to \mathbb{R}^k$ *in* $\mathbf{x}^\star$ *differenzierbar, und es gilt:*

$$J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}(\mathbf{x}^\star) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{x}^\star)) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^\star).$$

Definition 16.28 (Lokale Extrema (vgl. Def. 12.17)). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $\mathbf{x}^\star \in D$ heißt

i) *lokales Maximum*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass
$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^\star) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^\star, \epsilon) \cap D.$$

ii) *lokales Minimum*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass
$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^\star) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^\star, \epsilon) \cap D.$$

iii) *globales Maximum*, falls
$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^\star) \text{ für alle } \mathbf{x} \in D.$$

iv) *globales Minimum*, falls
$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^\star) \text{ für alle } \mathbf{x} \in D.$$

v) Lokale/globale Minima oder Maxima werden als lokale/globale Extrema bzw. Extremwerte der Funktion bezeichnet.

Definition 16.29 (Abgeschlossene, kompakte Menge).

i) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{R}^n \setminus \{X\}$ offen ist.

ii) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, falls X abgeschlossen und beschränkt (d.h. es gibt ein $M > 0$ mit $\|x\| \leq M$ für alle $x \in X$) ist.

Bemerkung 16.30. *Für* $n = 1$ *kann man sich kompakte Mengen als die Vereinigung von endlich viele abgeschossenen Intervallen vorstellen.*

Satz 16.31 (vgl. Satz 11.32). *Jede stetige Funktion* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nimmt auf einer kompakten Menge* $M \subseteq D$ *ihr Maximum und Minimum an, d.h. es gibt* $\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in [a, b]$ *mit*

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = \max\{f(\mathbf{x}) : x \in M\}, \textit{und}$$
$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \min\{f(\mathbf{x}) : x \in M\}.$$

Satz 16.32 (vgl. Satz 12.18). *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, und sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbar. Besitzt* f *in* $\mathbf{x}^\star \in D$ *ein lokales Extremum, dann ist* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}$.

Definition 16.33 (Hesse[43]-Matrix). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Für $\mathbf{x}^\star \in D$ heißt die symmetrische $(n \times n)$-Matrix

$$H_f(\mathbf{x}^\star) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}^\star) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}^\star) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}^\star) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}^\star) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}^\star) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f in $\mathbf{x}^\star$.

[43] Otto Hesse, 1811-1874

Satz 16.34 ((vgl. Satz 12.18 ii), iii) und Satz 8.42)). *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine* 2*-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei* $\mathbf{x}^\star \in D$ *mit* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}$.

i) *Ist* $H_f(\mathbf{x}^\star)$ *positiv definit, dann ist* $\mathbf{x}^\star$ *ein lokales Minimum.*

ii) *Ist* $H_f(\mathbf{x}^\star)$ *negativ definit, dann ist* $\mathbf{x}^\star$ *ein lokales Maximum.*

iii) *Ist* $H_f(\mathbf{x}^\star)$ *weder positiv noch negativ semi-definit (d.h. indefinit), dann ist* $\mathbf{x}^\star$ *kein lokales Extremum.*

Satz 16.35 (Lokale Extrema unter Nebenbedingungen). *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, und seien* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *stetig partiell differenzierbare Funktionen. Sei* $M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ *und sei* $\mathbf{x}^\star \in M$ *mit* $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}^\star) \neq \mathbf{0}$. *Ferner sei* $\mathbf{x}^\star$ *ein lokales Maximum (Minimum) von* f *unter der Nebenbedingung* $g(\mathbf{x}) = 0$*, d.h. es gibt ein* $\epsilon > 0$*, so dass gilt*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^\star) \quad (\textit{bzw. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^\star)) \ \textit{ für alle } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^\star, \epsilon) \cap D \cap M.$$

Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^\star) = \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{x}^\star).$$

Man nennt λ *einen Lagrange*[44]*-Multiplikator.*

[44] Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813