

Aufgabe 1.1 Man löse die Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda x$. Man gebe jeweils alle Eigenvektoren an:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1.2 Man bestimme die Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Welche Dimension haben die Eigenräume? Verifiziere, dass in diesem Beispiel je zwei Eigenvektoren aus verschiedenen Eigenräumen orthogonal sind. Ist das immer so? Gebe eine Matrix P zur Diagonalisierung von A an und zeige für dieses Beispiel, dass $D = P^{-1}AP$ gilt.

Aufgabe 1.3 Gegeben seien die Matrizen A und B :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Man bestimme die Eigenwerte der beiden Matrizen und untersuche sie auf Diagonalisierbarkeit.

Aufgabe 1.4 Sei M eine Matrix mit Einträgen aus \mathbb{R} . Man zeige:

- (a) Wenn die Matrix M den Eigenwert k hat, hat M^2 den Eigenwert k^2 .
- (b) Man verallgemeinere diesen Sachverhalt.

Aufgabe 1.5 Man zeige, dass jede Matrix $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ mit Einträgen aus \mathbb{R} diagonalisierbar ist.

Aufgabe 1.6 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Matrizen A und B auf Definitheit.

Bitte votieren Sie die Aufgaben 1.2 und zwei weitere Aufgaben.