Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2009/2010 **Übung 13**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Wolfgang Willems,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Wir setzen*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

für $a_{ij} \in \mathbb{R}$. *Sei* e_1, e_2, e_3 *die Standardbasis des* $\mathbb{R}^3$. *Gegeben seien nun die Vektoren* $a = (a_1, a_2, a_3)$ *und* $b = (b_1, b_2, b_3)$ *aus dem* $\mathbb{R}^3$. *Man zeige, dass der Vektor*

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3$$

orthogonal zu a *und* b *ist. Weiter beschreibe man den Orthogonalraum der linearen Hülle von* $\{(2, -1, 4), (0, 1, 3)\}$ *und gebe die zugehörende Dimension an.*

Aufgabe 13.2 *Die Punkte* $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, 0, 2a)$ *und* $C = (a, 0, a)$ *spannen für* $a \neq 0$ *ein Dreieck im* $\mathbb{R}^3$ *auf. Bestimmen Sie den Vektor der Höhe von* C *auf die Dreieckseite* AB.

Aufgabe 13.3 *Gegeben sei ein Rechteck im* $\mathbb{R}^2$ *mit den Seitenlängen* a *und* b. *Zeigen Sie, dass sich die Winkel* φ_1 *und* φ_2 *zwischen den Diagonalen des Rechtecks nach folgenden Formeln bestimmen lassen:*

$$\cos\varphi_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad \textit{und} \quad \cos\varphi_2 = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Aufgabe 13.4 *Man bestimme eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren des euklidischen Vektorraumes* $\mathbb{R}^3$, *die den Vektor* $(1, 1, \frac{2}{\sqrt{2}})$ *enthält und gebe die zugehörende Orthonormalbasis an.*

Aufgabe 13.5 *Im Vektorraum* $\mathbb{P}_2$ *der reellen Polynome vom Höchstgrad* 2 *sei das Skalarprodukt* $(\cdot\,,\cdot)$ *gegeben durch*

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

für $p, q \in \mathbb{P}_2$, *wobei* $\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$ *gilt. Weiterhin sei* $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ *und* $p_3(x) = x^2$. *Man orthonormiere die Vektoren* p_1, p_2 *und* p_3.

Aufgabe 13.6 *Man bestimme $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Spaltenvektoren der folgenden Matrix eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden:*

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{3} & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Bitte votieren Sie 3 Aufgaben.