Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2009/2010 **Übung 5**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Wolfgang Willems,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Gegeben seien die Abbildungen* $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ *und* $\psi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ *mit*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(n) & = & (a - 3n, -n), \\ \psi(m, n) & = & 2n - m - 2a, \end{array}$$

wobei $a \in \mathbb{Z}$ *fest gewählt. Man untersuche* $\varphi \circ \psi$ *und* $\psi \circ \varphi$ *auf Injektivität und Surjektivität.*

Aufgabe 5.2 *Eine Permutation* $\sigma \in S_n$ *ist eine Abbildung der Menge* $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ *auf sich selbst. Sie heißt* r*-zyklische Permutation, wenn es eine* r*-elementige Teilmenge* $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ *von* $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ *gibt, so dass gilt:* $\sigma(k_r) = k_1, \sigma(k_i) = k_{i+1}$ *für* $i = 1, 2, \ldots, r-1$ *und* $\sigma(k) = k$ *für* $k \in X \backslash \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$. *Verkürzt schreibt man dann* $\sigma = (k_1, \ldots, k_r)$. *Beispielsweise ist in* S_6 *die Permutation* $\sigma = (1, 2, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. *Weiterhin läßt sich beweisen, dass sich jede Permutation* $\sigma \in S_n$ *als Komposition* $\circ$ *elementefremder zyklischer Permutation darstellen läßt.*

(a) Man stelle die folgenden Permutationen in S_5 *als Komposition von zyklischen Permutationen dar:*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Man stelle folgende zyklische Permutationen in S_5 *in ausführlicher Schreibweise dar:* $\sigma_3 = (2, 4, 3, 5)$ *und* $\sigma_4 = (2, 4, 5)(3, 1)$.

Aufgabe 5.3 *Man weise nach, daß die Permutationsmengen:*

(a) $P_1 = \{\ (1),\ (1\ 3)\ (2\ 4),\ (1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3\ 2)\ \}$

(b) $P_2 = \{\ (1),\ (1\ 2)\ (3\ 4),\ (1\ 3)\ (2\ 4),\ (1\ 4)\ (2\ 3)\ \}$

bzgl. der Komposition jeweils kommutative Gruppen bilden.
Welche qualitativen Unterschiede bestehen zwischen beiden Gruppen?

Aufgabe 5.4 *Bestimmen Sie das Inverse von* $[11]_{23}$ *bezüglich der Multiplikation im Körper* $\mathbb{Z}_{23}$.

Aufgabe 5.5 *Man gebe alle Lösungen der folgenden Gleichungen in den gegebenen Körpern an:*

(a) Man löse $x^4 - 1 = 0$ *im Körper der reellen Zahlen.*

(b) Man löse $x^3 - 1 = 0$ *im Körper* $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 5.6

(a) Untersuchen Sie die algebraischen Strukturen $(M;+)$ *und* $(M;\circ)$ *mit* $M = \{0,1\}$ *und den Verknüpfungstafeln*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\circ$	0	1
0	0	0
1	0	1

auf ihre Gruppeneigenschaften.

(b) Untersuchen Sie, ob $(M;+;\circ)$ *ein Ring bzw. Körper ist. Begründen Sie Ihre Aussage.*

Bitte votieren Sie 3 Aufgaben.