Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2009/2010 **Übung 9**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Wolfgang Willems,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Gegeben seien:*
$x = (3, -1, -2, -1), b_1 = (1, 1, -1, 0)$, $b_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $b_3 = (1, -1, 0, 1)$ *und* $b_4 = (1, 1, -2, -1)$. *Man zeige, dass* $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ *eine Basis* B *des* $\mathbb{R}^4$ *bilden und stelle* x *als Linearkombination von* B *dar.*

Aufgabe 9.2 *Welche der folgenden Vektoren sind linear abhängig bzw. unabhängig? Bei linearer Abhängigkeit stelle man einen Vektor als Linearkombination der anderen dar! Bei linearer Unabhängigkeit überprüfe man, ob die Menge der Vektoren eine Basis des jeweiligen Vektorraumes bilden:*

(a) $\mathbb{R}^3 : v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 2, 1)$ *und* $v_3 = (0, 2, 0)$;

(b) $C^\circ([\pi, \pi])$ *(Vektorraum aller auf dem Intervall* $[-\pi, +\pi]$ *stetigen reellwertigen Funktionen:* $f_1 = \sin^2 x, f_2 = \cos^2 x$ *und* $f_3 = \cos 2x$.

Aufgabe 9.3 *Man zeige, dass die Menge* $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *mit* $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 0, 1, -1), v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ *und* $v_4 = (0, 2, 3, 0)$ *ein Erzeugendensystem des* $\mathbb{R}^4$ *ist. Ergänze die Mengen* $\{(0, 4, 5, 9), (3, 3, 3, 1)\}$ *durch Vektoren aus* E *zu einer Basis des* $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 9.4 *Man gebe für die Vektorräume* $\mathbb{R}^3$ *und* $\mathbb{R}^{2\times 3}$ *jeweils zwei linear unabhängige Vektoren, eine Basis und ein Erzeugendensystem, das keine Basis ist, an.*

Aufgabe 9.5 *Gegeben sei der Vektorraum* $V = \mathbb{C}^3$. *Ferner sei* v_1, v_2, v_3 *und* w *aus* V *mit*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ 7i \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \end{bmatrix} \text{ und } w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Bilden die Vektoren v_1, v_2 *und* v_3 *eine Basis von* V*?*

(b) Man stelle den Vektor w *als Linearkombination der Vektoren* v_1, v_2 *und* v_3 *dar.*

Aufgabe 9.6 *Betrachtet wird der Vektorraum* $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) *Liegt die Matrix* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *in der linearen Hülle* $\operatorname{lin} M$ *von* M *mit*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}?$$

Man bestimme die Dimension von $\operatorname{lin} M$. *Man erzeuge Unterräume von* $\operatorname{lin} M$ *zu allen möglichen Dimensionen.*

(b) *Sowohl alle symmetrischen Matrizen als auch alle Diagonalmatrizen aus* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *bilden einen Unterraum des* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *auf. Man bestimme eine Basis und die Dimension dieser beiden Unterräume.*

Bitte votieren Sie 3 Aufgaben.