

Aufgabe 99.1 Man beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion folgende Ungleichung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $a^n + b^n \leq (a + b)^n$.

Aufgabe 99.2 Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= i, & z_2 &= -\sqrt{3} + i, & z_3 &= 2 - 2i, \\ z_4 &= 2(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi), & z_5 &= 8(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi), & z_6 &= \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi, \\ z_7 &= 27e^{\frac{3\pi}{4}i}, & z_8 &= e^{\frac{\pi}{3}i}, & z_9 &= 81e^{\frac{5\pi}{6}i}. \end{aligned}$$

Man berechne:

- z_1^k mit $k \in \{15, 28, 201, 4278\}$,
- die Terme $z_2 - 2z_7$, $z_4 \cdot z_5 \cdot z_6$ und $z_7 \cdot z_8 \cdot z_9$,
- die Quotienten $\frac{z_1+z_2}{z_3}$, $\frac{z_3}{z_5}$, $\frac{z_5}{z_6}$, $\frac{z_7}{z_8}$ und $\frac{\bar{z}_4 \cdot z_9}{z_2}$,
- die Potenzen z_2^4 , z_4^6 und z_8^3 ,
- \sqrt{z} mit $z \in \{z_3, z_5, z_9\}$,
- die Wurzeln $\sqrt[3]{z_1}$ und $\sqrt[4]{z_9}$.

und stelle die Ergebnisse, wenn möglich, in der Form $x + iy$ dar. Man veranschauliche die Ergebnisse der Teilaufgaben (e) und (f) in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 99.3 Die folgende Relation R sei über \mathbb{N} definiert, wobei a eine gegebene natürliche Zahl ist:

$$n_1 R n_2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 4k = a(n_1 n_2).$$

- Man zeige, dass die Relation R eine Äquivalenzrelation über \mathbb{N} ist.
- Man gebe die Äquivalenzklasse $[2]_R$ für beliebige ungerade a an.
- Man beschreibe die Äquivalenzklassen für $a = 2$.

Aufgabe 99.4 Sei $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 4x^2 + 3$, und sei $f_2(x) = \sqrt{x}$.

- Man bestimme jeweils für f_1 und f_2 den größten Definitionsbereich X und den zugehörigen Wertebereich Y , so dass f_1 und f_2 Abbildungen sind, sowie, falls vorhanden, die inversen Abbildungen.
- Man untersuche f_1 und f_2 auf ihre Eigenschaften (Surjektivität, Injektivität, Bijektivität).
- Man bestimme von den Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $f_2 \circ f_1$ Definitionsbereich, Wertebereich, ihre Eigenschaften und, wenn möglich, die inversen Abbildungen.

Aufgabe 99.5 Die Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{1, 0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1, 0\}, i \in \{1, \dots, 6\}$, gegeben durch

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 - x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = \frac{1}{1 - x},$$

$$f_5(x) = \frac{x - 1}{x}, \quad f_6(x) = \frac{x}{x - 1},$$

sind bijektiv. Man gebe jeweils die Umkehrabbildung an und stelle für $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ mit der Komposition \circ als Operation eine Verknüpfungstabelle auf! Ist (M, \circ) eine Gruppe?

Aufgabe 99.6 Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $Ax = b$ über einem Körper \mathbb{K} :

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & & & -2x_4 & = & 6 \\ & 2x_2 & & 3x_4 & = & 2 \\ & 6x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & & & +\lambda x_4 & = & \mu \end{array}$$

- Es sei \mathbb{K} der Körper der reellen Zahlen.
 - Diskutieren Sie das Lösungsverhalten (nicht lösbar, $|L(A, b)| = 1$, $|L(A, b)| > 1$) des Gleichungssystems für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ durch Rangbetrachtungen.
 - Für den Fall $|L(A, b)| > 1$ ermittle man die Menge der Lösungen $L(A, b)$.
- Es sei \mathbb{K} der Restklassenkörper modulo 3, wobei die Einträge in A und b mit den entsprechenden Restklassen mod 3 identifiziert werden.
 - Diskutieren Sie das Lösungsverhalten des Gleichungssystems für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_3$ durch Rangbetrachtungen.

- (d) Geben Sie sämtliche Lösungen des Gleichungssystems für den Fall $|L(A, b)| > 1$ explizit an.

Aufgabe 99.7 Gegeben sei die Gleichung $A \cdot X - B = X$, wobei A, B und X Matrizen über dem Körper der reellen Zahlen sind.

- (a) Man löse die Gleichung nach X auf (dabei wird vorausgesetzt, dass die Gleichung lösbar ist).
- (b) Für welche Werte α ist die obige Gleichung nicht lösbar, wenn A und B gegeben sind durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} ?$$

- (c) Die Matrixgleichung sei lösbar und B habe 4 Zeilen und 5 Spalten. Welche Formate haben dann die Matrizen A und X ?

Aufgabe 99.8 Gegeben sei folgende Menge von (2×2) -Matrizen:

$$M = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Man zeige, dass M ein Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist.
- (b) Welche Dimension hat der Unterraum? Man gebe eine Basis von M an und begründe die Wahl.

**Wir wünschen allen ein frohes Weihnachtsfest sowie ein
gesundes und erfolgreiches neues Jahr!**