

**Aufgabe 99.1** Man beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion folgende Ungleichung: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt:  $a^n + b^n \leq (a + b)^n$ .

**Lösung:**

I.A.:  $n_0 = 1 \rightarrow a^1 + b^1 = a + b = (a + b)^1$

I.V.:  $a^n + b^n \leq (a + b)^n$

I.Beh.:  $a^{n+1} + b^{n+1} \leq (a + b)^{n+1}$

I.Bew.:  $a^{n+1} + b^{n+1} \leq (a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n \Rightarrow a^{n+1} + b^{n+1} \leq (a + b) \cdot \overbrace{(a^n + b^n)}^{\text{nach I.V.}} \leq (a + b)^n \cdot (a + b)$   
 $\Rightarrow a^{n+1} + b^{n+1} \leq a^{n+1} + b^{n+1} + \underbrace{(ba^n + ab^n)}_{\geq 0, \text{ da } a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \leq (a + b)(a + b)^n = (a + b)^{n+1}$   
 $\Rightarrow a^{n+1} + b^{n+1} \leq (a + b)^{n+1}, \square$

**Aufgabe 99.2** Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= i, & z_2 &= -\sqrt{3} + i, & z_3 &= 2 - 2i, \\ z_4 &= 2(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi), & z_5 &= 8(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi), & z_6 &= \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \\ z_7 &= 27e^{\frac{3\pi}{4}i}, & z_8 &= e^{\frac{\pi}{3}i}, & z_9 &= 81e^{\frac{5\pi}{6}i}. \end{aligned}$$

Man berechne:

- $z_1^k$  mit  $k \in \{15, 28, 201, 4278\}$ ,
- die Terme  $z_2 - 2z_7, z_4 \cdot z_5 \cdot z_6$  und  $z_7 \cdot z_8 \cdot z_9$ ,
- die Quotienten  $\frac{z_1+z_2}{z_3}, \frac{z_3}{z_5}, \frac{z_5}{z_6}, \frac{z_7}{z_8}$  und  $\frac{\overline{z_4} \cdot z_9}{z_2}$ ,
- die Potenzen  $z_2^4, z_4^6, z_8^3$ ,
- $\sqrt{z}$  mit  $z \in \{z_3, z_5, z_9\}$ ,
- die Wurzeln  $\sqrt[3]{z_1}$  und  $\sqrt[4]{z_9}$

und stelle die Ergebnisse, wenn möglich, in der Form  $x + iy$  dar. Man veranschauliche die Ergebnisse der Teilaufgaben 5. und 6. in der Gaußschen Zahlenebene.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} z_1 &= i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}, \\ z_2 &= -\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}, \\ z_3 &= 2 - 2i = \sqrt{8}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{8}e^{\frac{7\pi}{4}i}, \\ z_4 &= \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi) = 2e^{\frac{7\pi}{4}i}, \\ z_5 &= -4 - 4\sqrt{3}i = 8(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) = 8e^{\frac{4\pi}{3}i}, \\ z_6 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi = e^{\frac{2\pi}{3}i}, \\ z_7 &= -\frac{27}{2}\sqrt{2} + \frac{27}{2}\sqrt{2}i = 27(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = 27e^{\frac{3\pi}{4}i}, \\ z_8 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{\frac{\pi}{3}i}, \\ z_9 &= -\frac{81}{2}\sqrt{3} + \frac{81}{2}i = 81(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = 81e^{\frac{5\pi}{6}i}. \end{aligned}$$

- $i^{15} = -i, i^{28} = 1, i^{201} = i, i^{4278} = -1$
- $z_2 - 2z_7 = 27(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + i(1 - 27\sqrt{2})$   
 $z_4 \cdot z_5 \cdot z_6 = 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2}i$   
 $z_7 \cdot z_8 \cdot z_9 = 2187e^{\frac{23\pi}{12}i}$
- $\frac{z_1+z_2}{z_3} = -\frac{2+\sqrt{3}}{4} + i(\frac{2-\sqrt{3}}{4})$   
 $\frac{z_3}{z_5} = \frac{-1+\sqrt{3}}{8} + i(\frac{1+\sqrt{3}}{8})$   
 $\frac{z_5}{z_6} = -4 + 4\sqrt{3}i$   
 $\frac{z_7}{z_8} = 27e^{\frac{5\pi}{12}i}$   
 $\frac{\overline{z_4} \cdot z_9}{z_2} = \frac{81}{2}\sqrt{2} + \frac{81}{2}\sqrt{2}i,$

4.  $z_2^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$   
 $z_4^6 = 64i$   
 $z_8^3 = -1,$
5.  $\sqrt{z_3} = 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{7\pi}{8}} \vee 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{15\pi}{8}}$   
 $\sqrt{z_5} = -\sqrt{2} + i\sqrt{6} \vee \sqrt{2} - i\sqrt{6}$   
 $\sqrt{z_9} = 9(e^{\frac{5\pi}{12}i} \vee 9(e^{\frac{17\pi}{12}i}$
6.  $\sqrt[3]{z_1} = e^{i\cdot\phi}, \phi \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\}$   
 $\sqrt[4]{z_9} = 3e^{i\cdot\phi}, \phi \in \{\frac{5\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}\}$

**Aufgabe 99.3** Achtung: Im ursprünglichen Aufgabenblatt ist ein Fehler in der Definition der Relation!  
 Die folgende Relation  $R$  sei über  $\mathbb{N}$  definiert, wobei  $a$  eine gegebene natürliche Zahl ist:

$$n_1 R n_2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 4k = a(n_1 - n_2).$$

- (a) Man zeige, dass die Relation  $R$  eine Äquivalenzrelation über  $\mathbb{N}$  ist.  
 (b) Man gebe die Äquivalenzklasse  $[2]_R$  für beliebige ungerade  $a$  an.  
 (c) Man beschreibe die Äquivalenzklassen für  $a = 2$ .

**Lösung:**

- (a) Zu zeigen ist, dass  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.  
 Reflexivität: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $n R n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 4k = a(n - n) = a \cdot 0 = 0$ . Da mit  $k = 0$  ein  $k \in \mathbb{Z}$  existiert, für das dies gilt, ist  $R$  reflexiv.  
 Symmetrie:  $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} n_1 R n_2 &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 4k = a(n_1 - n_2) \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : -4k = a(n_2 - n_1) \\ &\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} : 4k' = a(n_2 - n_1) \quad (\text{mit } k' := -k \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow n_2 R n_1 \end{aligned}$$

Somit ist  $R$  symmetrisch.

Transitivität:  $\forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} n_1 R n_2 \wedge n_2 R n_3 &\Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} : 4k_1 = a(n_1 - n_2) \wedge \exists k_2 \in \mathbb{Z} : 4k_2 = a(n_2 - n_3) \\ &\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : 4(k_1 + k_2) = a(n_1 - n_2 + n_2 - n_3) = a(n_1 - n_3) \\ &\Rightarrow \exists k_3 \in \mathbb{Z} : 4k_3 = a(n_1 - n_3) \quad (\text{mit } k_3 := k_1 + k_2) \\ &\Rightarrow n_1 R n_3 \end{aligned}$$

Somit ist  $R$  transitiv. Da  $R$  also reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.  $\square$

- (b) Wir suchen alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $2 R n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 4k = a(2 - n)$ , d.h.  $k = \frac{a(2-n)}{4}$  muss eine ganze Zahl sein. Da  $a$  selbst ungerade ist, sind  $a$  und  $4$  teilerfremd. Somit muss, damit  $k \in \mathbb{Z}$  gelten kann,  $2 - n$  durch  $4$  teilbar sein:  $2 - n \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow n \equiv 2 \pmod{4}$ . Somit kommen für  $n$  alle Elemente der Restklasse 2 modulo 4 in Frage. Da  $R$  über  $\mathbb{N}$  definiert ist, müssen die Elemente natürlich sein.  
 $[2]_R = \{x \in \mathbb{N} : x \equiv 2 \pmod{4}\} = \{x \in [2]_4 : x > 0\}$

- (c) Aus (b) nehmen wir die Idee, dass es sich bei den Äquivalenzklassen um Restklassen handelt und beobachten Folgendes:

$$\begin{aligned} n_1 R n_2 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 4k = 2(n_1 - n_2) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : k = \frac{n_1 - n_2}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{n_1 - n_2}{2} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n_1 - n_2 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar} \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich aber um die Kongruenzrelation modulo 2 (vgl. Beispiel 2.9), eingeschränkt auf die natürlichen Zahlen. Die Äquivalenzklassen sind somit gerade die Restklassen modulo 2 (eine Darstellungsvariante würde genügen):

$$\begin{aligned} [1]_R &= \{x \in \mathbb{N} : x \equiv 1 \pmod{2}\} = \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \dots\} \\ [2]_R &= \{x \in \mathbb{N} : x \equiv 0 \pmod{2}\} = \{2k : k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 99.4** Sei  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_1(x) = 4x^2 + 3$ , und sei  $f_2(x) = \sqrt{x}$ .

- Man bestimme jeweils für  $f_1$  und  $f_2$  den größten Definitionsbereich  $X$  und den zugehörigen Wertebereich  $Y$ , sodass  $f_1$  und  $f_2$  Abbildungen sind, sowie, falls vorhanden, die inversen Abbildungen.
- Man untersuche  $f_1$  und  $f_2$  auf Bijektivität.
- Man bestimme von  $f_1 \circ f_2$  sowie  $f_2 \circ f_1$  Definitionsbereich und Wertebereich, ihre Eigenschaften und, wenn möglich, die inversen Abbildungen.

**Lösung 4:** (a)

- $f_1 : X = \{x \in \mathbb{R}\}; Y = \{y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 3\}$
- $f_2 : X = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}; Y = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$
- $f_1^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-3}{4}}$
- $f_2^{-1}(x) = x^2$

(b) Zunächst zu  $f_1$ :

Surjektivität: Ist durch die korrekte Wahl des Wertebereiches gegeben.

Injektivität: Ist nicht gegeben, da gilt  $f_1(x) = f_2(-x)$

Und  $f_2$ :

Surjektivität: Ist wieder durch die korrekte Wahl des Wertebereiches gegeben.

Injektivität:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_2(y) \\ \sqrt{x} &= \sqrt{y} \\ x &= y \end{aligned}$$

und somit ist die Funktion bijektiv.

(c)

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 &= 4x + 3 \\ f_2 \circ f_1 &= \sqrt{4x^2 + 3} \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich und Wertebereich erstreckt sich für  $f_1 \circ f_2$  über den gesamten reellen Zahlenbereich.

Für  $f_2 \circ f_1$  gilt:

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{R}\} \\ Y &= \{y \in \mathbb{R}_{\geq \sqrt{3}}\} \end{aligned}$$

Und nun die Umkehrungen:

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)^{-1} &= f_2^{-1} \circ f_1^{-1} = \frac{x-3}{4} \\ (f_2 \circ f_1)^{-1} &= f_1^{-1} \circ f_2^{-1} = \sqrt{\frac{x^2-3}{4}} \end{aligned}$$

### Aufgabe 99.5

Ineinander einsetzen und Doppelbrüche auflösen führt zu folgender Verknüpfungstabelle:

$\circ$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$f_2$	$f_2$	$f_1$	$f_5$	$f_6$	$f_3$	$f_4$
$f_3$	$f_3$	$f_4$	$f_1$	$f_2$	$f_6$	$f_5$
$f_4$	$f_4$	$f_3$	$f_6$	$f_5$	$f_1$	$f_2$
$f_5$	$f_5$	$f_6$	$f_2$	$f_1$	$f_4$	$f_3$
$f_6$	$f_6$	$f_5$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$

Da in der Gruppe  $f_1$  offensichtlich das neutrale Element und gleichzeitig die identische Abbildung ist, müssen die inversen Elemente der Gruppe (s.u.) jeweils auch die Umkehrabbildungen sein. Wir untersuchen die Struktur nun auf die Gruppeneigenschaften:

- abgeschlossen (in der Gruppentafel tauchen nur  $f_1$  bis  $f_6$  auf)
- assoziativ, weil das für  $\circ$  im Allgemeinen gilt (siehe Lemma 2.20)
- neutrales Element:  $f_1$
- inverse Elemente: selbstinvers sind:  $f_1, f_2, f_3, f_6$   
 $f_4^{-1} = f_5, f_5^{-1} = f_4$

**Aufgabe 99.6** Gegeben sei das folgende Gleichungssystem  $Ax=b$  über einem Körper  $\mathbb{K}$ :

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & & & -2x_4 & = & 6 \\ & 2x_2 & & 3x_4 & = & 2 \\ & 6x_2 & -2x_3 & 5x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & & & \lambda x_4 & = & \mu \end{array}$$

- Es sei  $\mathbb{K}$  der Körper der reellen Zahlen.
  - Diskutieren sie das Lösungsverhalten (nicht lösbar,  $|L(A, b)| = 1$ ,  $|L(A, b)| > 1$ ) des Gleichungssystems für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  durch Rangbetrachtungen.
  - Für den Fall  $|L(A, b)| > 1$  ermittle man die Menge der Lösungen  $L(A, b)$ .
- Es sei  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ , wobei die Einträge in  $A$  und  $b$  angepasst werden.
  - Diskutieren sie das Lösungsverhalten des Gleichungssystems für alle  $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}_3$  durch Rangbetrachtungen.

**Lösung 6:** Zunächst die Dreiecksmatrix mit den reellen Einträgen:

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & & & -2x_4 & = & 6 \\ & 2x_2 & & 3x_4 & = & 2 \\ & & -2x_3 & -4x_4 & = & -4 \\ x_1 & & & \lambda x_4 - 4 & = & \mu + 12 \end{array}$$

(a) Für  $\lambda \neq 4$  hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, da die Matrix dann den vollen Rang hat. Für  $\lambda = 4 \wedge \mu = -12$  hat das Gleichungssystem 3 Lösungen, da die Matrix nur noch Rang 3 hat. Für die anderen Fälle hat das Gleichungssystem keine Lösung.

(b) Die Lösungsmenge ist  $M = \{(6 + 2t, 1 - 1.5t, 2 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

(c) Für  $\lambda \neq 1$  hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, da die Matrix dann den vollen Rang hat. Für  $\lambda = 1 \wedge \mu = 0$  hat das Gleichungssystem 3 Lösungen, da die Matrix nur noch Rang 3 hat. Für die anderen Fälle hat das Gleichungssystem keine Lösung.

**Aufgabe 99.7** Gegeben sei die Gleichung  $A \cdot X - B = X$ , wobei  $A, B$  und  $X$  Matrizen über dem Körper der reellen Zahlen sind.

- (a) Man löse die Gleichung nach  $X$  auf (dabei wird vorausgesetzt, dass die Gleichung lösbar ist).  
 (b) Für welche Werte  $\alpha$  ist die obige Gleichung nicht lösbar, wenn  $A$  und  $B$  gegeben sind durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} ?$$

- (c) Die Matrixgleichung sei lösbar und  $B$  habe 4 Zeilen und 5 Spalten. Welche Formate haben dann die Matrizen  $A$  und  $X$ ?

**Lösung:**

- (a)

$$\begin{aligned} A \cdot X - B &= X \\ A \cdot X - E \cdot X &= B \\ (A - E) \cdot X &= B \\ X &= (A - E)^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

- (b)  $(A - E) \cdot X = B$   
 $\det(A - E) = 0$  für  $\alpha = 1$   
 mit  $X = [x_1|x_2|x_3|x_4]$  und  $B = [b_1|b_2|b_3|b_4]$   $(A - E) \cdot x_i = b_i$  für  $\alpha = 1$  lösen ergibt u.a.  $0 = -5$

$\Rightarrow$  Für  $\alpha = 1$  ist die Gleichung nicht lösbar.

- (c)  $X$  hat wie  $B$  4 Zeilen und 5 Spalten.  
 $A$  hat 4 Zeilen und 4 Spalten.

**Aufgabe 99.8** Gegeben sei folgende Menge von  $(2 \times 2)$ -Matrizen:

$$M = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Man zeige, dass  $M$  ein Unterraum des Vektorraumes  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist.  
 (b) Welche Dimension hat der Unterraum? Man gebe eine Basis von  $M$  an und begründe die Wahl.

**Lösung:**

- (a) Wir wenden das Unterraumkriterium an:

(i)  $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M \quad (a_1 = a_2 = 0)$

(ii) Für alle  $A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \in M$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lambda A + B = \lambda \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 + b_1 & -(\lambda a_2 + b_2) \\ \lambda a_2 + b_2 & \lambda a_1 + b_1 \end{bmatrix} \in M$$

Da beide Teile des Unterraumkriteriums erfüllt sind, handelt es sich bei  $M$  um einen Unterraum von  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

- (b) Wir bestimmen zunächst die Basis, da die Dimension direkt daraus ablesbar ist. In der ursprünglichen Definition von  $M$  sind zwei Parameter  $a_1$  und  $a_2$  angegeben, die frei variiert werden können. Jeder dieser Parameter repräsentiert einen Koeffizienten in einer Linearkombination, um ein Element aus  $M$  zu erhalten:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} a_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Daraus ist direkt eine Basis ablesbar:  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Die Dimension ist ebenfalls direkt ablesbar:  $\dim M = |B| = 2$